ماثيماتيكا – الرياضيات باستخدام الكومبيوتر

Book · January 2000

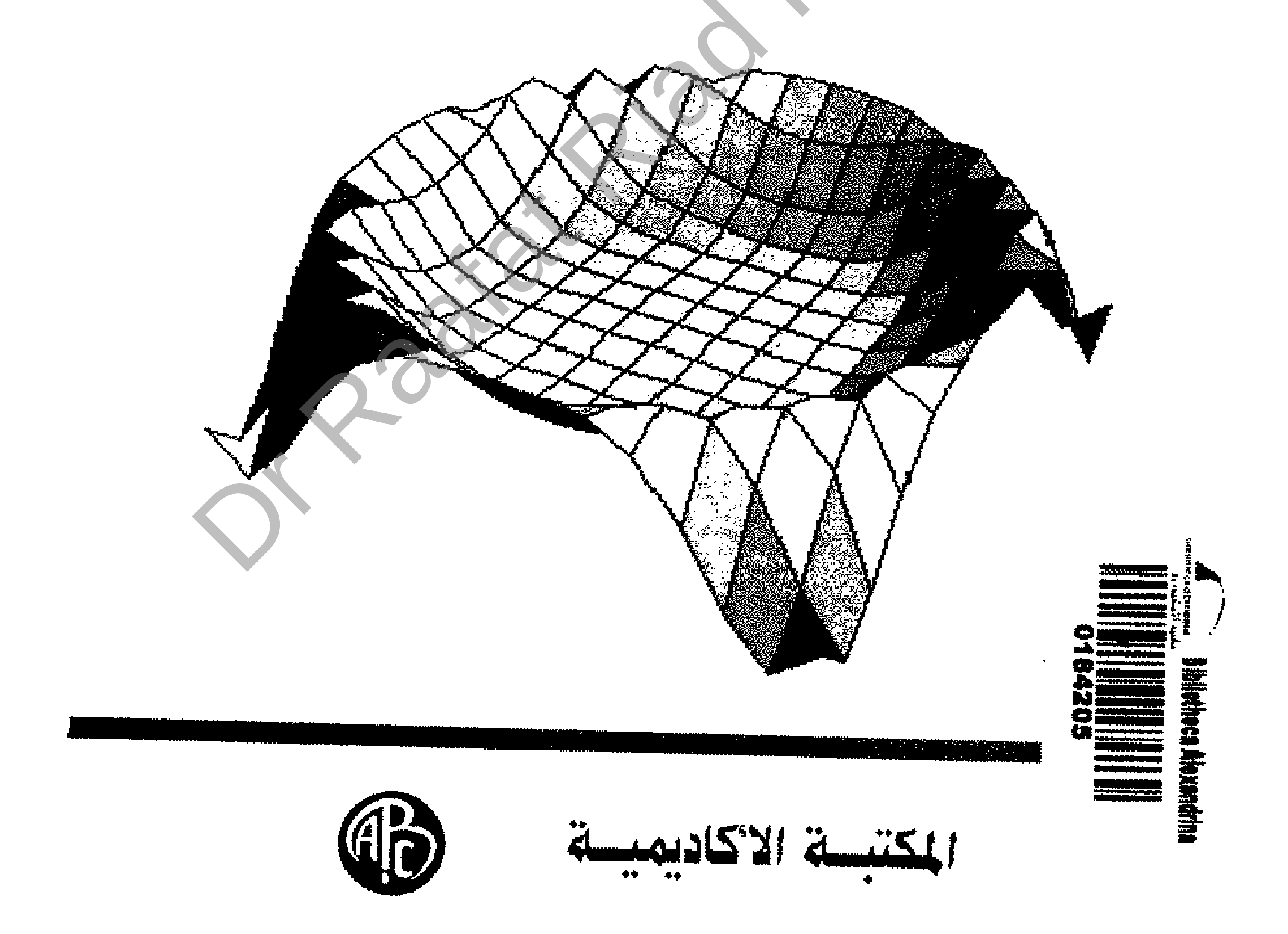
1 author:

Raafat Riad
Ain Shams University - Cairo - Fgypt

ماثيماتيكا

الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

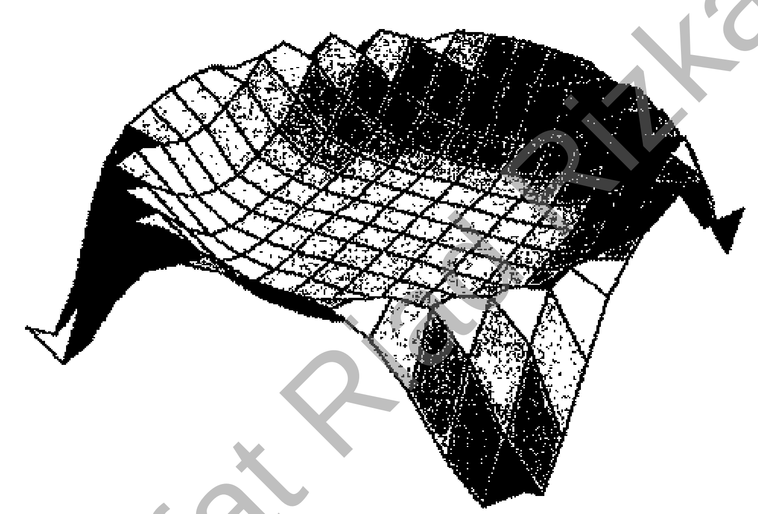
دكتور
رأفت رياض رزق الله



المكتبة الأكاديمية

ماثيماتيكا
الرياضيات باستخدام الكومبيوتر

ماثيماتيكا
الرياضيات باستخدام الكومبيوتر



دكتور/ رأفت رياض رزق الله
أستاذ مساعد بقسم الرياضيات
كلية التربية - جامعة عين شمس



الناشر
المكتبة الأكاديمية
٢٠٠٠

حقوق النشر

المكتبة الاكاديمية

١٢١ شارع التحرير — الدقى — القاهرة

تليفون : ٣٤٨٥٢٨٢ / ٣٤٩١٨٩٠

فاكس : ٣٤٩١٨٩٠ — ٢٠٢

برنامج ماثيماتيكا ***Mathematica*** من تصميم
Stephen Wolfram ويعتبر البرنامج علامة
مسجلة من إنتاج شركة ***Wolfram Research***

مقدمة

برنامج ماثيماتيكا هو نظام عام لعمل الحسابات العلمية ويستخدمه الآن العديد من الباحثين فى مجال الرياضيات والهندسة فى معظم أنحاء العالم وتطبيقات برنامج ماثيماتيكا تدخل فى العديد من العلوم كما يستخدم كلغة برمجة ولقد ظهر برنامج ماثيماتيكا فى عام **1988** وقام بتصميمه **Stephen Wolfram** الذى قام بتأسيس شركة **Wolfram Research** حيث تم تطوير برنامج ماثيماتيكا وظهر له إصدارات على العديد من نظم الكومبيوتر مثل نظام التشغيل **DOS** ونظام النوافذ **Windows** وماكينتوش **Mackintosh** وكيفية التعامل مع الأوامر المختلفة مع التوضيح بالأمثلة المتعددة فى فروع الرياضيات المختلفة وقد تم تقسيم الكتاب إلى سبعة أبواب كالآتى :

الباب الأول : ما هو ماثيماتيكا؟

الباب الثانى : ماثيماتيكا والحسابات العددية

الباب الثالث : ماثيماتيكا والجبر

الباب الرابع : ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

الباب الخامس : ماثيماتيكا ورسم الدوال

الباب السادس : ماثيماتيكا والتحليل العددى

الباب السابع : البرمجة فى ماثيماتيكا

المحتويات

الصفحة

الباب الأول — **ما هو ماثيماتيكا؟** 13

١ – تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows 17

٢ – القلب والواجهة فى ماثيماتيكا 22
Kernel and Front End in Mathematica

٣ – الحصول على معلومات من ماثيماتيكا 30
Getting Information from Mathematica

٤ – التعبيرات فى ماثيماتيكا 38
Mathematica and Expressions

الباب الثانى — **ماثيماتيكا والدوال العددية** 41

١ – الحسابات العددية Numerical Calculation 43

٢ – الأنظمة العددية Number Systems 47

٣ – المتغيرات Variables 51

٤ – بعض الدوال الرياضية Some Mathematical Functions ... 57

٥ – الأعداد المركبة Complex Numbers 67

الصفحة

الباب الثالث **ماثيماتيكا والجبر** 71

١ – كثيرات الحدود والدوال الكسرية 73
Polynomials and Rational Functions

٢ – المتسلسلات Series 79

٣ – حل المعادلات Solving Equations 84

٤ – الجبر الخطى Linear Algebra 92

أولاً : القوائم Lists 92

ثانياً : المصفوفات Matrices 103

ثالثاً : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems 112

رابعاً : القيم المميزة والمتجهات المميزة 116
Eigenvalues and Eigenvectors

الباب الرابع **ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل** 119

١ – تعريف الدوال Defining Functions 121

٢ – النهايات Limits 129

٣ – التفاضل Differentiation 134

٤ – التكامل Integration 141

٥ – المعادلات التفاضلية Differential Equations 144

الصفحة

الباب الخامس — ماثيماتيكا ورسم الدوال	149
١ – رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting	152
٢ – رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting	176
٣ – رسم الدوال البارامترية Parametric Plots	193
الباب السادس — ماثيماتيكا والتحليل العددى	197
١ – الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود .... Numerical Solution of Polynomial Equation	200
٢ – إيجاد جذر تقريبى Numerical Root Finding	202
٣ – إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization	208
٤ – الحساب العددى للمجموع وحواصل الضرب .... Numerical Sum and Product	213
٥ – التكامل العددى Numerical Integration	216
٦ – التقريب بالمربعات الصغرى Least - Squares	221

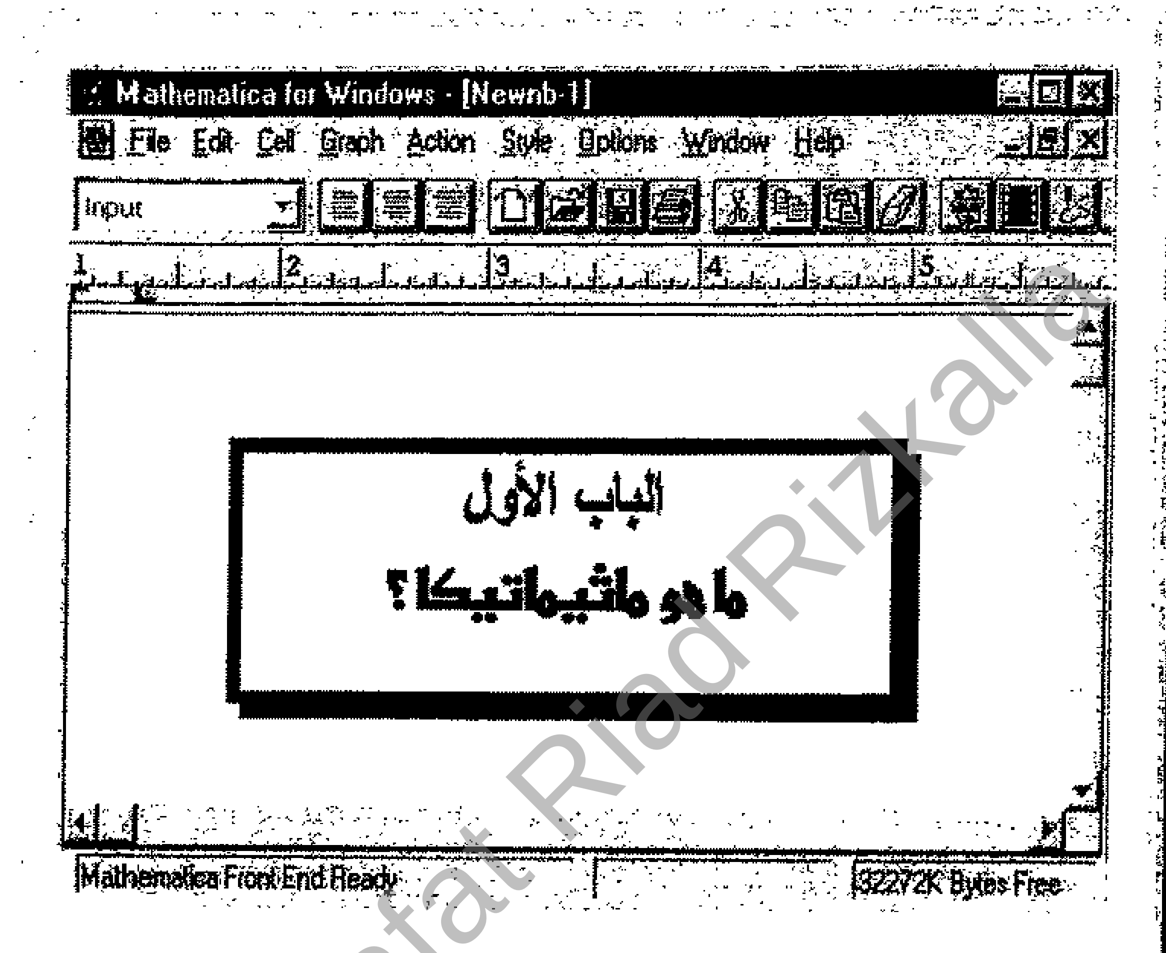
الصفحة

الباب السابع — البرمجة فى ماثيماتيكا 229

١ – منظومة الإجراءات Procedure 231

٢ – الحلقات التكرارية Loops 234

٣ – أوامر الانتقال المشروط Conditionals 240



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ ـ تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows
٢ ـ القلب والواجهة في ماثيماتيكا
٣ ـ الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
٤ ـ التعبيرات في ماثيماتيكا

الباب الأول

ما هو ماثيماتيكا ؟
What is Mathematica ?

برنامج ماثيماتيكا هو نظام عام General System لعمل الحسابات والعمليات الرياضية المختلفة وهو برنامج مفيد ومتعدد الأغراض ويخدم قطاعا كبيرا من التخصصات العلمية المختلفة . وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بأجراء العمليات الحسابية العددية Numerical Calculations المتعارف عليها مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة وحساب الأسس واللوغاريتمات والدوال المثلثية والزائدية سواء للأعداد الحقيقية Real Numbers أو الأعداد المركبة Complex Numbers وكذلك يقوم بأجراء العمليات الرياضية الرمزية Symbolic المتعارف عليها في فروع كثيرة من الرياضيات مثل الجبر والتفاضل والتكامل والجبر الخطى والمعادلات التفاضلية والدوال الخاصة والتحليل العددى والاحتمالات والإحصاء والبرمجة الخطية ، كما أن ماثيماتيكا يقوم برسم الدوال سواء المباشرة أو البارامترية في بعدين أو ثلاثة أبعاد بالإضافة الى إمكانات متقدمة في الرسم البيالى وإنتاج وثائق رياضية تتضمن النصوص والمعادلات والرموز الرياضية والرسومات معا وكذلك يمكن استخدام ماثيماتيكا كلغة برمجة لكتابة برامج تحل مشكلات كبيرة يعجز عن حلها أمر واحد وهذه البرامج لا تتعامل فقط مع الأعداد ولكن تتعامل أيضاً مع التعبيرات الرمزية ومع الأشكال الموسومة .

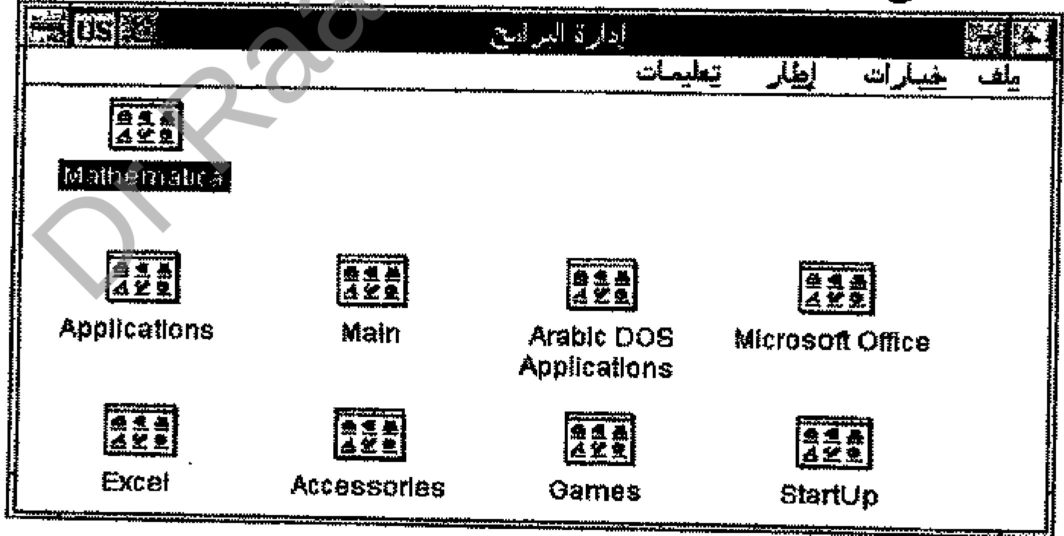
ولغة ماثيماتيكا تعتبر لغة عالية المستوى جـــدا **Very High Level Language** ويطلق عليها أيضا لغـــة الجيـــل الرابـــع **Fourth Generation Language** لأنها تفعل فى خطوة واحدة مـــا تفعله اللغات عالية المستوى (مثل بيســـك **BASIC** وفورتـــران **FORTRAN** وسى **C** وباسكال **PASCAL** وغيرها) فى عدة خطوات . ويوجد داخل برنامج ماثيماتيكا **built - in** اكـــثر من **1000** دالة تخدم فروع الرياضيات المختلفة .

وبرنامج ماثيماتيكا قام بتصميمـــه **Stephen Wolfram** وقـــامت شـــركة **Wolfram Research** بتقديـــم الإصـــدار الأول **mathematica 2.0** فى عام ١٩٨٨ ثم ظهـــر الإصـــدار الثـــانى **mathematica 2.1** والإصدار الثالث **mathematica 2.2**

وقبل أن نتعرف على استخدامات ماثيماتيكا سوف نعرض أولا كيفيـــة تشغيل برنامج ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ **Windows** .

١ . تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows

قدمت شركة مايكروسوفت برنامج النوافذ Microsoft Windows في العديد من الإصدارات ويمكن من خلاله تشغيل عدة برامج في وقت واحد وتبادل المعلومات بينهما وهذا الأسلوب يعرف بأسلوب تعدد المهام multitasking ويقوم برنامج النوافذ بتقسيم الشاشة الى مناطق تعرف بالنوافذ أو الإطارات وكل نافذة تطل على برنامج أو مجموعة من البرامج ولكل نافذة عنوان يكتب على قمة النافذة ويتم تشغيل البرامج من داخل النوافذ بأسلوب حدد الهدف الذى تختاره ثم أطلق point and shoot آي وجه المؤشر نحو البرنامج المطلوب تنفيذه ثم اضغط زر الفأرة الأيسر أو اضغط مفتاح الإدخال Enter . وبرنامج النوافذ مثل البرامج التطبيقية الأخرى يمكن تشغيله من محث نظام التشغيل فإذا تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة Hard Disk فإنه يمكن تشغيله مباشرة عن طريق كتابة win ثم نضغط على مفتاح الإدخال Enter وعند بدء تشغيل برنامج النوافذ في الإصدار 3.1 سوف تظهر نافذة إدارة البرامج Program Manager مشابهة للشكل (١) الآتي



شكل (١)

وهناك عدة طرق لبدء تشـــغيل برنامج ماثيماتيكا

– يمكن بدا تشـــغيله من مدير البرامج **Program Manager** كما نفعل مـع معظم تطبيقات برنامج النوافذ **Windows** .

– كما يمكن تشغيله من مدير الملفات **File Manager** الموجود بالنافذة الرئيسية **Main** وذلك بأن ننقر فوق أسم الملف **ma.exe** .

وفى الإصدار الأول **mathematica 2.0** كان يتم تشغيل برنامج ماثيماتيكا مـن بيئـة نظام التشغيل **Dos** مباشرة ، وبفرض أن برنامج ماثيماتيكا **mathematica 2.2** قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكومبيوتر وذلك من خلال برنامج النوافذ **Windows** والـه موجود فى إطار من إطارات برنامج النوافذ تحت أسم **Mathematica** ويجعل هذا الإطار هو الإطار النشط وذلك عن طريق اختيار البرنامج **Mathematica** من قائمة إطار **Window** فى إدارة البرامج كما هو موضح فى الشكل (٢)

إدارة البرامج

ملف خيارات إطار تعليمات

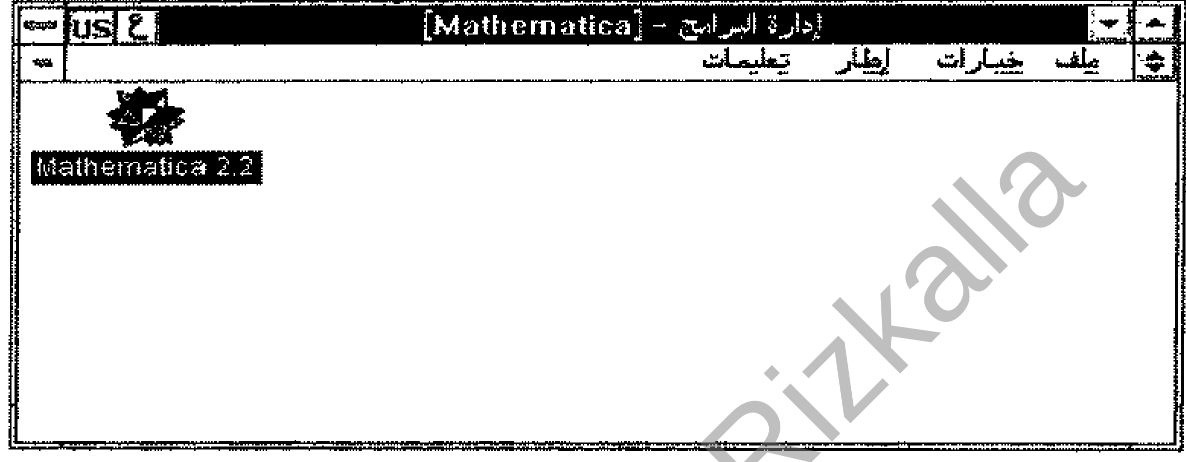
تتالي Shift+F5
تجانب Shift+F4
ترتيب الرموز

Main ١
Applications ٢
Excel ٣
Arabic DOS Applications ٤
Games ٥
StartUp ٦ ✓
Microsoft Office ٧
Accessories ٨
Mathematica ٩

Mathematica
Applications
Excel

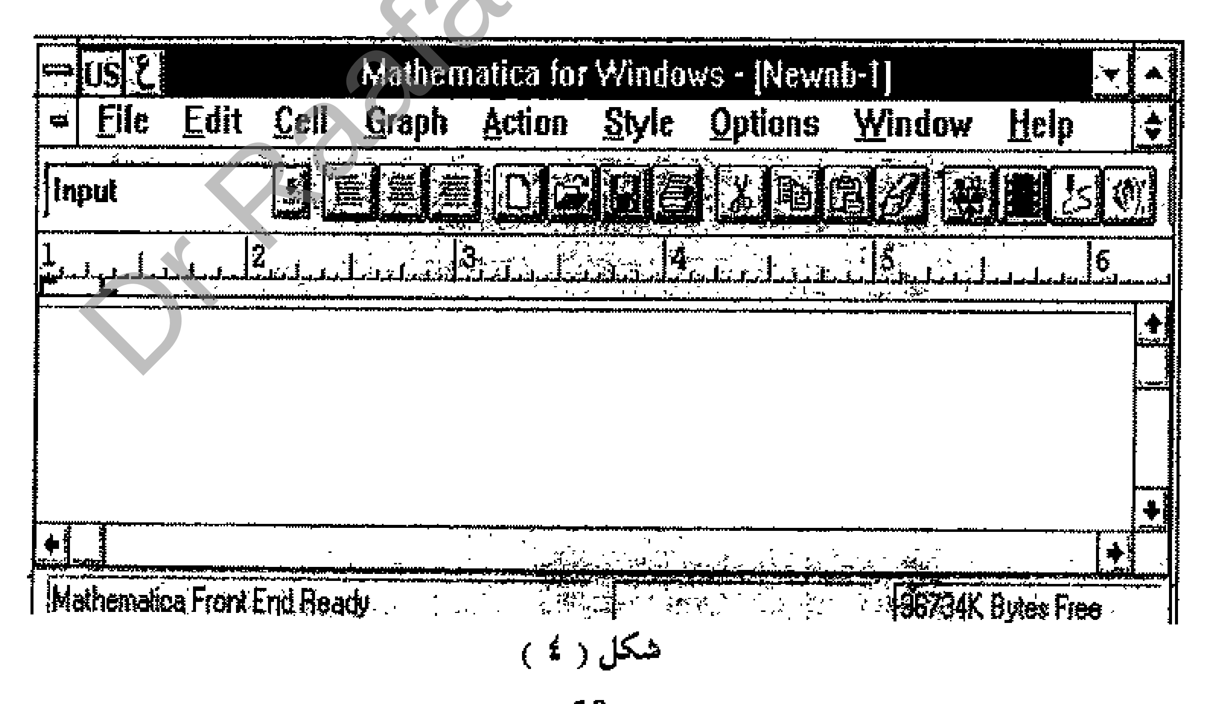
شـــكل (٢)

وبعد الضغط على زر الفأرة يتم الدخول الى النافذة الخاصة ببرنامج ماثيماتيكا وسوف تظهر شاشة مثل الموضحة فى شكل (٣)



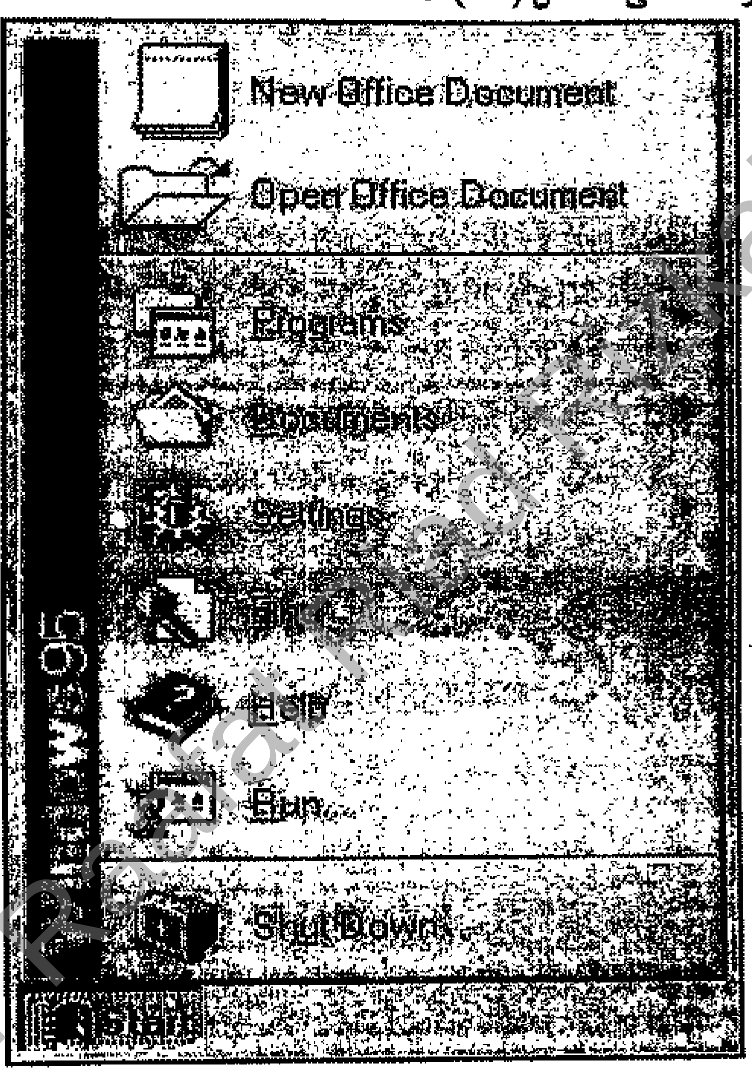
شكل (٣)

حيث تظهر أيقونة الرمز الخاص ببرنامج ماثيماتيكا وعن طريق النقر مرتين بسرعة على هذا الرمز بواسطة الفارة mouse بعد لحظات تظهر الشاشة المبينة فى شكل (٤)



شكل (٤)

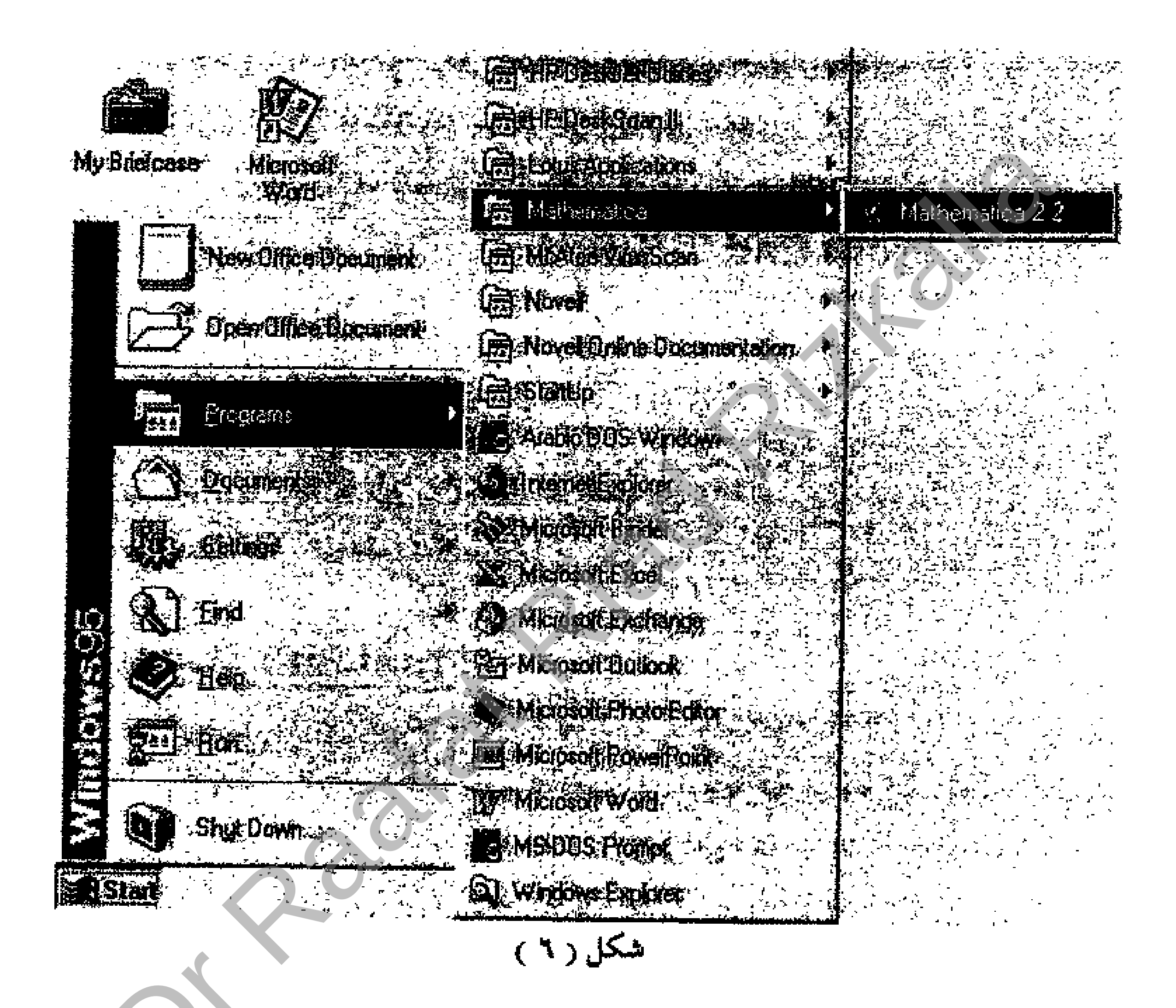
وإذا كان برنامج النوافذ المستخدم Windows 95 فانه عند الضغط على المربع Start الموجود فى اسفل الشاشة من جهة اليسار فسوف تظهر قائمة كالموضحة فى الشكل (٥) .



شكل (٥)

وبتحريك مؤشر الفارة الى الاختيار **Programs** ثم الضغط على زر الفارة تظهر قائمة اخرى مثل الموضحة بالشكل (٦) ثم نضغط بزر الفارة على البرنامج Mathematica فتظهر الأيقونة الخاصة ببرنامج ماثيماتيكا Mathematica 2.2 وبالضغط عليها

يبدءا تحميل برنامج ماثيماتيكا وتظهر شاشة كالمبينة في شكل (٤) ويتم ذلك علــى اعتبــار أن برنامج ماثيماتيكا mathematica 2.2 قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكومبيوتر .



شكل (٦)

وسوف نتعرف الآن على تركيب ماثيماتيكا كبرنامج ، حيث تتيح معرفة هذا التركيب فهما أكثر لما يحدث أثناء استخدامنا لبرنامج ماثيماتيكا على الكومبيوتر .

٢ـ القلب والواجهة فى ماثيماتيكا
Kernel and Front End in Mathematica

يتكون برنامج ماثيماتيكا من جزئيين أساسيين هما

– القلب **Kernel**

– والواجهة **Front End**

أما القلب Kernel

فهو الجزء الذي يقوم بتنفيذ العمليات الرياضية المطلوبة ، ويتم تحميل القلب عن طريق كتابـــة آي عملية حسابية بسيطة في بداية التشغيل مثل ١+١ ثم نضغط على زر التنفيذ وهو مفتاح **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح ، ويمكن تحميل القلب مع بداية تشـــغيل ماثيماتيكا عـــن طريـــق اختيار **Option** في قائمة الاختيارات

وأما الواجهة Front End

فهي حلقة الوصل بين المستخدم **User** والقلب **Kernel** وعندما يعطى المســـتخدم أمـــر ما لماثيماتيكا لتنفيذه فانه في الحقيقة يعطيه للواجهة التي تقوم بترجمته الى شفرات خاصة يفهمهـــا القلب ، وعندما ينفذ القلب هذا الأمر فانه يخرج النتائج على هيئة شفرات تقوم الواجهة بترجمتها الى أرقام أو حروف أو رسومات أو ألوان حسب نتائج الأوامر المعطاة ويتم عرضها على الشاشة بطريقة يمكن فهمها والاستفادة منها وشكل(٧) يوضح العلاقة بين المستخدم والواجهة والقلب .

	⟶	**Front End**	⟶	**Kernel**
User	⟵	الواجهة	⟵	القلب

شكل (٧)

وبرنامج ماثيماتيكا يوجد له إصدارات على العديد من نظم الكومبيوتر مثل نظام التشغيل دوس **DOS** ونظام وندوز **Windows** وماكينتوش **Makintosh** ونظام يونيكس **Unix** ، وفى كل هذه النظم يوجد نفس القلب أما الواجهة فتختلف من نظام الى آخر بمعنى أن ماثيماتيكا على كل نظام من هذه النظم قادر على أداء نفس القدر من العمليات الرياضية وإخراج نفس النتائج ، والشكل (٤) يمثل الواجهة فى نظام وندوز .

وطريقة إدخال الأوامر فى ماثيماتيكا يكون بظهور المحث **Prompt** على الصورة

In[n] :=

حيث يقوم المستخدم بكتابة المدخلات أو الأمر المطلوب تنفيذه وبعد الضغط على زر التنفيذ **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح يقوم ماثيماتيكا بطباعة الناتج **Output** بجانب المحث

Out[n]=

حيث **n** يمثل رقم المدخل لان ماثيماتيكا يقوم بترقيم كل مدخلاته فى ترتيب تصاعدى . بالنظر الى واجهة ماثيماتيكا فى شكل (٤) نرى أن الشاشة تنقسم الى ثلاثة أجزاء أساسية الجزء العلوى به أربعة صفوف

الصف الأول من أعلى عبارة عن الشريط الموضح

US ع Mathematica for Windows - [Newnb-1]

ويحتوى على الآتي :

– فى الركن الأيسر يوجد مربع صغير يسمى قائمة التحكم **Control Panel** وهو موجود فى جميع تطبيقات النوافذ وبتحريك مؤشر الفارة نحو هذا المربع ثم الضغط على زر الفارة تفتح قائمة التحكم الآتية

Restore
Move
Maximize
Close Alt+F4
System...
Switch To... Ctrl+Esc

ومن خلال هذه القائمة يمكن نقل Move أو تكبير Maximize أو تصغير Minimize نافذة البرنامج أو غلق النافذة Close والخروج من البرنامج أو التبديل الى برنـــامج آخـــر Switch To

– المربع US بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة الإنجليزية

– المربع ع بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة العربية

– فى منتصف الشريط يوجد عنوان البرنامج Mathematica for Windows واسم الملـــف الذى يتم التعامل معه وبرنامج ماثيماتيكا يقوم باعطاء الاسم Newnb-1 للملف عنـــد بدايـــة التشغيل ويمكن للمستخدم حفظ الملف بعد ذلك بالاسم الذى يريده

– فى الركن الأيمن يوجد مثلثان صغيران أحدهما يشير الى أعلى ▲ ويستخدم لتكبير واجهـــة البرنامج والأخر الى اسفل ▼ ويستخدم لتصغير واجهة البرنامج ويتم ذلك عن طريق تحريك مؤشر الفارة نحو رمز المثلث المطلوب ثم الضغط على زر الفارة .

الصف الثانى من أعلى هو صف القائمة الرئيسية Bar menu وبه مجموعة الاختيـــارات الآتية

File Edit Cell Graph Action Style Options Window Help

وبتحريك المؤشـــــر نحو الاختيار المطلوب ثم الضغط على زر الفارة الأيســـر فانه يخرج من هذا الاختيار قائـــمة مســـــحوبة تســـمى بالقائمة العمودية وبها مجموعـــة من الاختيـــارات التـــى تســـهل من العمل داخل ماثيماتيكا ، فمثلا عند الضغط بالفارة على الاختيار File الموجـــود فى صف القائمـــة الرئيســـــية (أو بالضغط على مفتاح Alt مع الحرف F) تظهر الشاشـــة الموضحة بالشكل (٨) وبها نجد مجموعة من الاختيارات الفرعية فى القائمة العمودية .

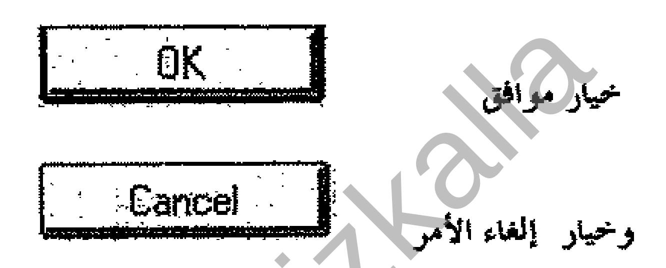
Mathematica for Windows - [Newnb-1]
File Edit Cell Graph Action Style Options Window Help
New Ctrl+N
Open/Import... Ctrl+O
Close Ctrl+F4
Save Ctrl+S
Save As/Export...
Print... Ctrl+P
Exit Alt+F4
1 C:\WNMATH22\RAAFAT-3.MA
2 C:\WNMATH22\RAAFAT-2.MA
3 C:\WNMATH22\RAAFAT-1.MA
4 C:\WNMATH22\MATH-BOK\PLOT3D-R.MA

شـــــكل (٨)

وبرنامج ماثيماتيكا يخصص بعض المفاتيح لأداء مهمة معينة والرموز الخاصة بهذه المفاتيح تكتب أمام الخيار فى القائمة ويطلق عليها مفاتيح الاختصار **Sort Cut Keys** فمثلا القائمة الخاصة بالاختيار **File** تحتوى على الآتي :

الخيار	مفاتيح الاختصار	الوظيفة التي يقوم بها الخيار
New	**Ctrl + N**	عمل ملف جديد داخل ماثيماتيكا
Open / Import	**Ctrl + O**	فتح ملف سبق تخزينه بواسطة برنامج ماثيماتيكا
Close	**Ctrl + F4**	إغلاق الملف المفتوح
Save	**Ctrl + S**	حفظ الملف تحت اسمه السابق
Print	**Ctrl + P**	طباعة الملف على جهاز الطباعة

وفى نهاية القائمة العمودية الخاصة بالاختيار File تظهر أسماء آخر أربعة ملفات سبق التعامل معها حيث يتم فتح آي منها بمجرد الضغط على أسم الملف المطلوب. وعند التعامل مع بعض الخيارات بالقوائم العمودية تظهر صناديق حوارية يطلق عليها dialog boxes وتحتوى هذه الصناديق على رسائل أو خيارات من ضمنها



فمثلا عند الضغط بمؤشر الفارة على الخيار Open من القائمة العمودية File يظهر صندوق حوارى مثل الموجود بالشكل (٩)

Open
File Name: *.ma
defaults.ma
raafat.ma
raafat-2.ma
Directories: c:\wnmath22
c:\
wnmath22
docs
notebook
packages
OK
Cancel
Help
No Binary
File Type: Notebooks (*.MA)
Drives: c: raafat

شكل (٩)

وبعد تحديد أسم الملف المطلوب فتحه من الخيار **File Name** ومكان وجوده على القرص من الخيار **Drives** ثم الضغط بمؤشر الفارة على موافق **OK** يتم فتح الملف المطلوب . وعن طريق الاختيار **Help** من صف القائمة الرئيسية يمكن التعرف على شرح وافى لمحتويات برنامج ماثيماتيكا .

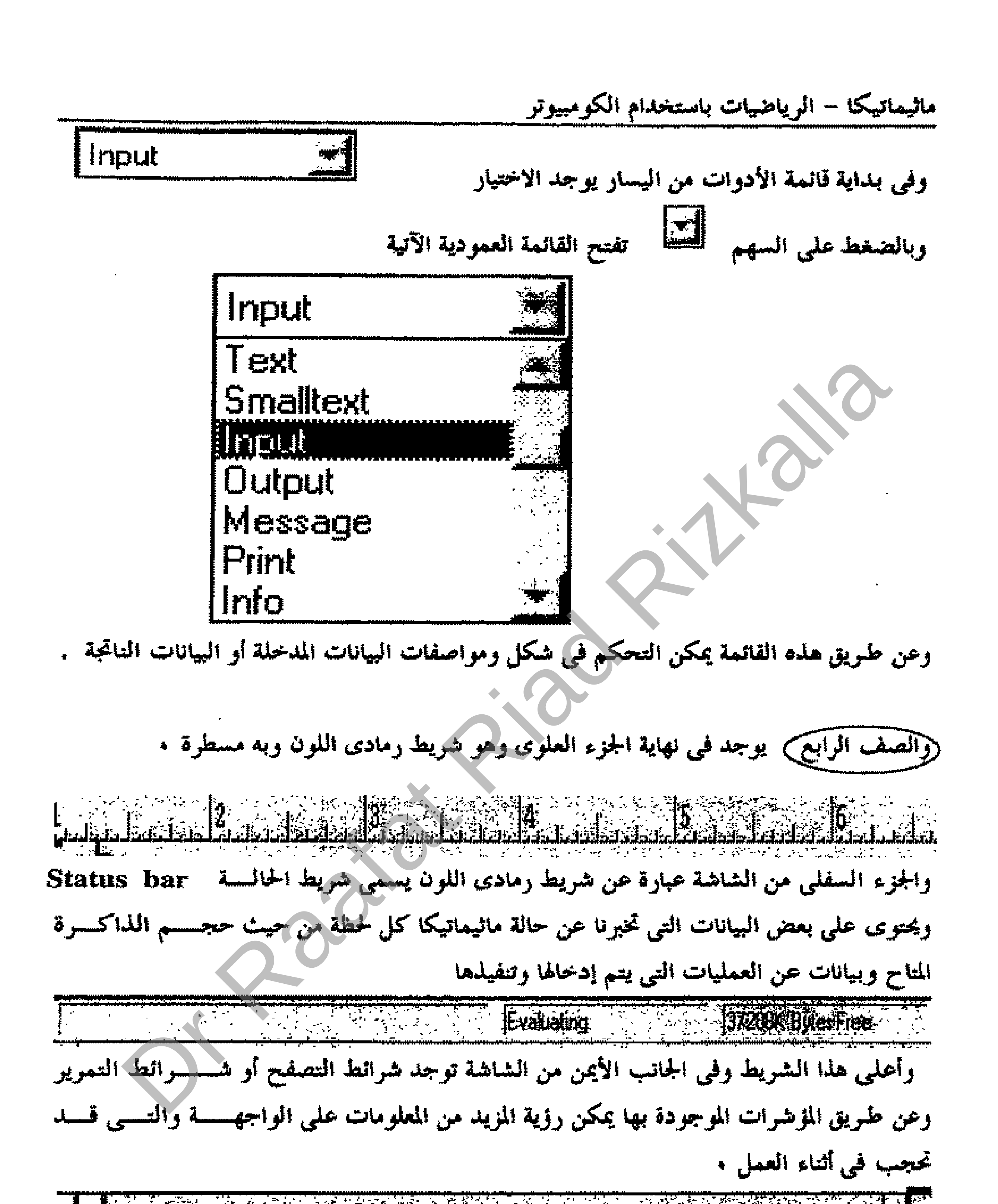
والصف الثالث من أعلى عبارة عن شريط رمادى اللـــون وهـــو قائمـــة الأدوات Tool bar الموضحة

Input

وتحتوى قائمة الأدوات على الكثير من الرموز مثل

الرمز	الوظيفة التى يقوم بها
	فتح وثيقة جديدة New
	فتح ملف قديم Open
	حفظ الملف Save
	طباعة الملف Print
	القص Cut
	النسخ Copy
	اللصق Paste
	تنفيذ الأمر Insert

وهذه الرموز تساعد المستخدم فى التعامل مع ماثيماتيكا وتنفيذ المهام بسرعة .



وفى بداية قائمة الأدوات من اليسار يوجد الاختيار

وبالضغط على السهم تفتح القائمة العمودية الآتية

وعن طريق هذه القائمة يمكن التحكم فى شكل ومواصفات البيانات المدخلة أو البيانات الناتجة .

والصف الرابع يوجد فى نهاية الجزء العلوى وهو شريط رمادى اللون وبه مسطرة .

والجزء السفلى من الشاشة عبارة عن شريط رمادى اللون يسمى شريط الحالة Status bar ويحتوى على بعض البيانات التى تخبرنا عن حالة ماثيماتيكا كل لحظة من حيث حجم الذاكرة المتاح وبيانات عن العمليات التى يتم إدخالها وتنفيذها

وأعلى هذا الشريط وفى الجانب الأيمن من الشاشة توجد شرائط التصفح أو شرائط التمرير وعن طريق المؤشرات الموجودة بها يمكن رؤية المزيد من المعلومات على الواجهة والتى قد تحجب فى أثناء العمل .

أما المساحة البيضاء المحصورة بين الجزء العلوى والجزء السفلى فى الواجهة فإنها تمثل منطقة العمل ويتم فيها كتابة الأوامر والعمليات المطلوب تنفيذها بنفس الطريقة التـي نكتـب بهـا فـي أي برنامج معالج كلمات Word Processing فمثلا

– لمسح حرف على يسار المؤشر نضغط على مفتاح Backspace
– لمسح حرف على يمين المؤشر نضغط على مفتاح Del
– للانتقال الى سطر جديد نضغط على المفتاح Enter

ويمكن الاستفادة من مزايا العمل تحت نظام النوافذ Windows مثل ميزة

– النسخ Copy
– القص Cut
– اللصق Paste

فمثلا عندما نريد تنفيذ عملية تم كتابتها من قبل فإنه يمكن الذهاب أليها بالمؤشـر وتظليلهـا بالفارة ثم الذهاب بالمؤشر الى الاختيار Edit فى صف القائمة الرئيسية والضغط علـى الأمـر Copy لعمل نسخة من الجزء المظلل (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمـز أو بالضغط على المفتاح Ctr والمفتاح V معا من لوحة المفاتيح) وبعد ذلك نذهب بالمؤشـر الى المكان المطلوب لصق النسخة فيه ثم نضغط على الأمـر Paste مـن الاختيـار Edit (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز أو بالضغط على المفتاح Ctr والمفتاح X معا من لوحة المفاتيح) وبعد الحصول على النسخة المطلوبة يتم تنفيذهـا أو عمـل التعديـلات المطلوبة بها قبل التنفيذ مما يوفر الوقت . ولإرسال أي أمر لتنفيذه بعد كتابتـه نضغـط علـى مفتاح التنفيذ Insert (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز) .

مفتاح التنفيذ Insert يستخدم لتنفيذ أي أمر من أوامر ماثيماتيكا
بينما مفتاح الإدخال Enter يستخدم في ماثيماتيكا للانتقال الى سطر جديد

وخلال دراستنا عندما نذكر جملة أرسل الأمر فهذا يعني كتابة الأمر بعد ظهور الحـث الخـاص بماثيماتيكا وتنفيذه عن طريق الضغط على مفتاح التنفيذ Insert .

٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
Getting Information from Mathematica

في كثير من الأحيان نحتاج الى التعرف على المعلومات الخاصة بالأوامر والدوال المختلفة في ماثيماتيكا والتعرف على الصيغة العامة وكيفية كتابة كل من هذه الأوامر وماثيماتيكا يقدم لنا ذلك عن طريق رمز علامة الاستفهام ? فعندما ندخل الأمر

? Name

حيث Name يمثل أسم الأمر أو الدالة المطلوب الاستعلام عنها وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ تظهر الصيغة العامة وجميع المعلومات الخاصة بالأمر Name ويراعى أن يكون الحرف الأول فقط من أسم الأمر أو الدالة مكتوب بالحروف الكبيرة **Capital** وإذا كان أسم الأمر يحتوى على كلمتين أو اكثر فإن كل كلمة في الأمر تبدأ بحرف كبير ، فمثلا لمعرفة الصيغة العامة للدالة **Log** يرسل الأمر

? Log

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الأتي

Log[z] **gives the natural logarithm of z (logarithm to base E)**

Log[b, z] **gives the logarithm of z to base b.**

آي أن الأمر **Log[z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم الطبيعي للعدد z للأساس e

والأمر في الصيغة **Log[b, z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم للعدد z للأساس b

ولمعرفة الصيغة العامة لأمر الرسم **Plot** يرسل الأمر **?Plot**

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax.

Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

آي أن الأمر Plot[f, {x, xmin, xmax}] يقوم برسم الدالة f(x) في النطاق من

x = xmin الى x = xmax

والأمر في الصيغة Plot[{f1, f2,...}, {x, xmin, xmax}] يقوم برسم مجموعة الدوال ... f1, f2,

في النطاق من x = xmin الى x = xmax

وللتعرف على معلومات إضافية عن أمر الرسم Plot مثل التعرف على الخيارات التي يمكن أضافتها إلى الرسم يرسل الأمر

?? Plot

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as afunction of x from xmin to xmax. Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}
Options[Plot] =
{AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesOrigin->Automatic,AxesStyle->Automatic,Background->Automatic, ColorOutput -> Automatic,Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog-> {},Frame-> False,FrameLabel-> None,FrameStyle-> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10., PlotDivision -> 20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic,PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont, Display Function:> $DisplayFunction}

ونلاحظ وجود قائمة كبيرة من الخيارات التى تستخدم مع أمر الرسم **Plot** سوف نتعرف عليها بالتفصيل في الباب الخامس (ماثيماتيكا ورسم الدوال) ،

وللتعرف على جميع الأوامر والدوال التى تبدأ بحرف A يرسل الأمر

?A*

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Abort	**Append**	**AbortProtect**	**AppendTo**
Above	**Apply**	**Abs**	**ArcCos**
AbsoluteDashing	**ArcCosh**	**AbsolutePointSize**	**ArcCot**
AbsoluteThickness	**ArcCoth**	**AbsoluteTime**	**ArcCsc**
CcountingForm	**ArcCsch**	**Accumulate**	**ArcSec**
Accuracy	**ArcSech**	**AccuracyGoal**	**ArcSin**
AddTo	**ArcSinh**	**AiryAi**	**ArcTan**
AiryAiPrime	**ArcTanh**	**AiryBi**	**Arg**
AiryBiPrime	**AlgebraicRules**	**Array**	**AspectRatio**
Alias	**AtomQ**	**All**	**Attributes**
Alternatives	**Automatic**	**AmbientLight**	**Auxiliary**
Analytic	**Axes**	**AnchoredSearch**	**AxesEdge**
And	**AxesLabel**	**Apart**	**AxesOrigin**
ApartSquareFree	**AxesStyle**		
ArithmeticGeometricMean			
AlgebraicRulesData			

حيث يظهر بيان بجميع الأوامر والدوال الموجودة في برنامج ماثيماتيكا والتي تبدأ بحرف A وقد استخدمنا الرمز * ليحل مكان أي عدد من الحروف يكتب بعد الحرف A ويمكن الاستعلام عن أي من هذه الأوامر أو الدوال كما سبق وذكرنا ، ومن ذلك نرى أنه بواسطة الرمز ? يمكن التعرف على شرح وافي لجميع الأوامر والدوال في ماثيماتيكا. ويوجد رمز آخر هو علامة النسبة المئوية % من خلاله يتيح لماثيماتيكا إمكانية أجراء عمليات على ناتج أخرجه من قبل ،

مثال توضيحى

— إذا أدخلنا إلى ماثيماتيكا عملية مثل 3+5 فإن الناتج يكون 8

— وإذا أردنا إجراء عملية على هذا الناتج مثل طرح 2 منه فإننا نشير الى هذا الناتج بعلامة النسبة المئوية % وبالتالى بدلاً من كتابة 2-8 يكتب 2-% فيخرج لنا الناتج 6

— وإذا أردنا أجراء عملية أخرى على نفس الناتج الأول 8 بقسمته على 4 فإننا نشير إلى الناتج 8 بعلامتى نسبة مئوية %% لان الناتج 8 يسبق هذه العملية بعمليتين كما يلى 4/ %% فيخرج لنا الناتج 2 .

> ولما كان ماثيماتيكا يرقم لنا كل من مدخلاته ومخرجاته ترقيم تصاعدى فان هناك طريقة اسهل خاصة إذا كان المطلوب أجراء عملية على نواتج أخرجه ماثيماتيكا قبل العملية الحالية بعدد كبير من العمليات وفى هذه الحالة توضع علامة النسبة المئوية يليها رقم ذلك الناتج حسب الترقيم المعطى من ماثيماتيكا

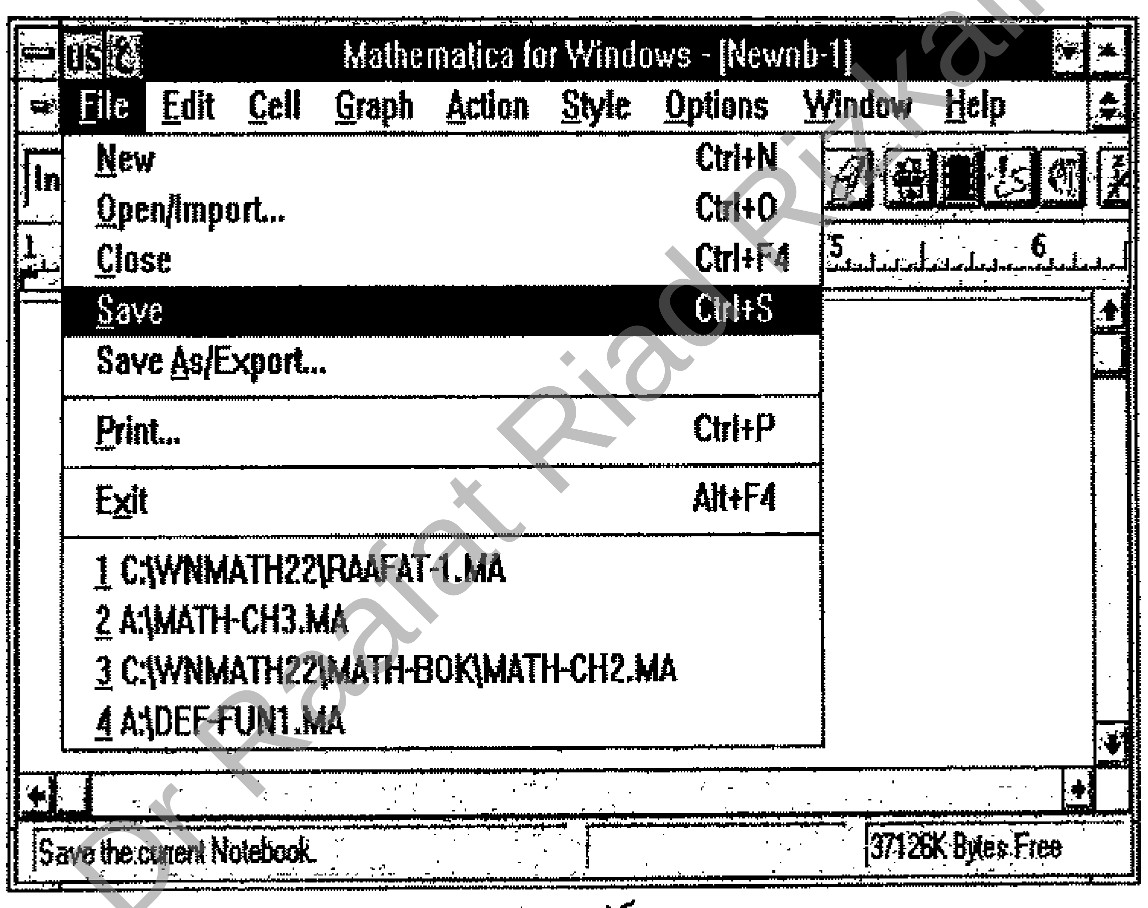
ولتوضيح ذلك

— إذا كان 8 فى المثال السابق هو ناتج العملية رقم 40 (Out[40]) وأردنا طرح 2 منها فإننا نكتب

%40 - 2

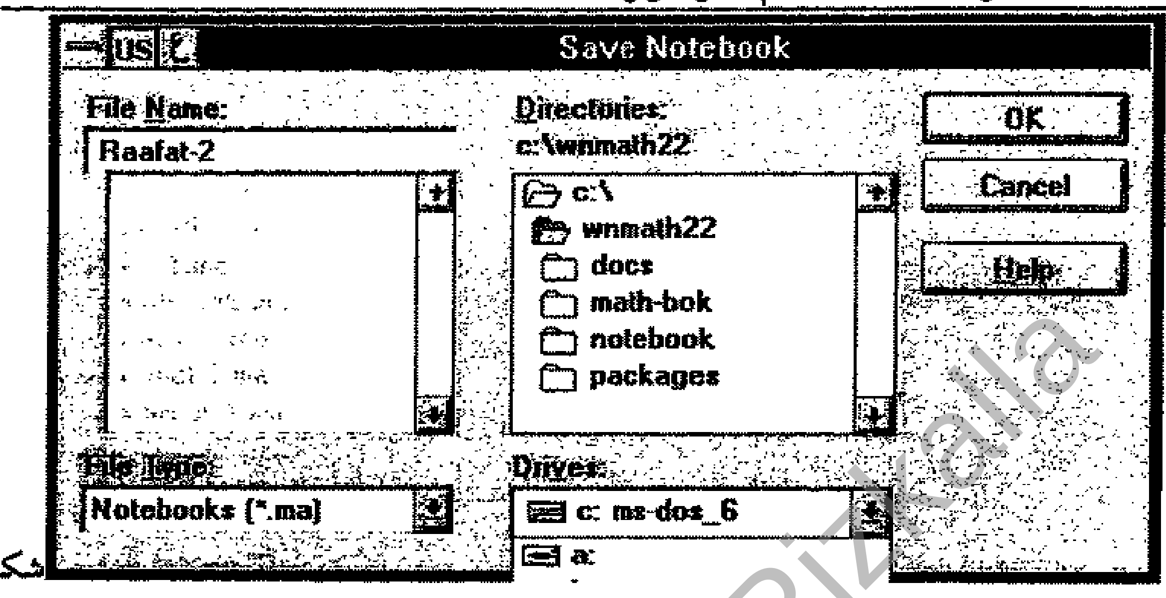
فيخرج لنا الناتج 6 .

ويقوم برنامج ماثيماتيكا بتســجيل كل ما يكتب وينفذ من أوامر فــى ملــف يســمى دفــتر **notebook** وفى نهاية العملية يقوم المســتخدم **user** بحفظ هذا الدفتر فى ملــف تحت أســم يختاره المســتخدم ويتكون اصل الاســم **root name** من حرف الى ثمانية حروف ويقوم ماثيماتيكــا بوضع الاسم الممتد **extension** الخاص بــه وهــو **ma** ويتم الحفظ عن طريق الضغط بمؤشر الفارة على **File** فى شريط القائمة الرئيسية فى أعلــى الواجهة فتظهر قائمة عمودية مثل الموضحة فى شكل (١٠) .



شكل (١٠)

وبالضغط بمؤشــر الفارة على الأمر **Save** تظهر نافذة أخرى كما فى الشكل (١١)



شكل (١١)

وبعد كتابة اســـم الملف نقوم باختيار المكان الذى ســـيحفظ فيه على القرص الصلب C أو أقراص مرنـــة A , B ويتم ذلك بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز

Drives:

وفى الشكل (١١)

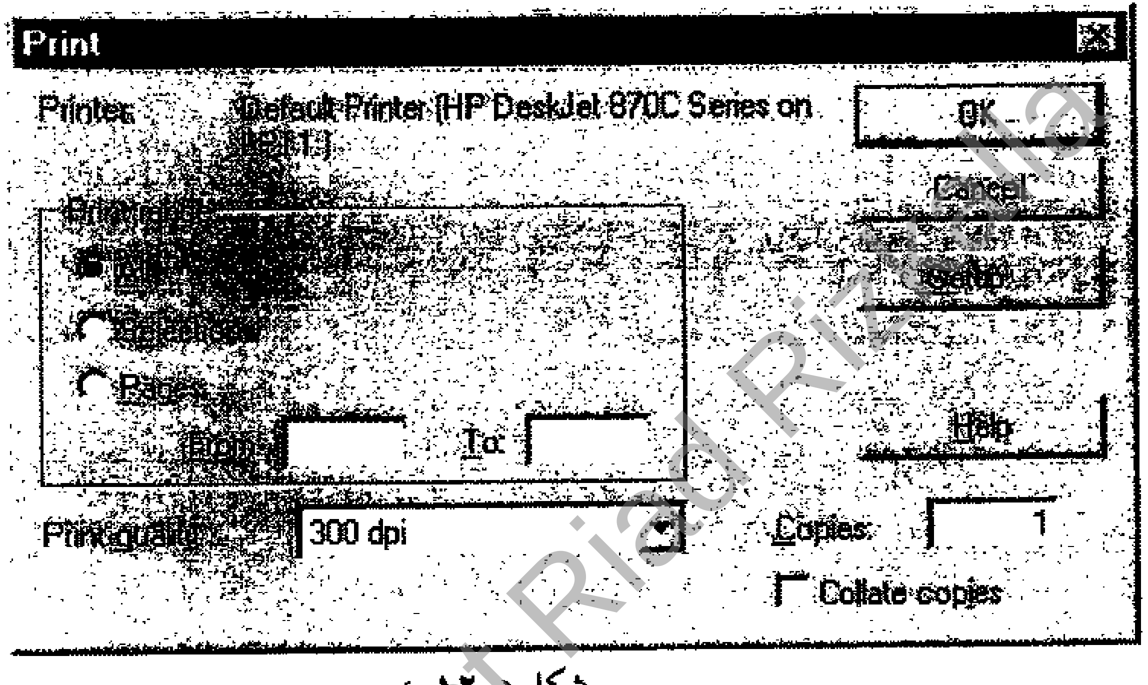
– تم تسمية الملف باسم Raafat-2.ma

– وتم تخزينه على القرص الصلب C داخل الفهرس المفتوح wnmath22

وبالضغط على موافق **OK** يتم التخزين .

وأثناء التعامل مع الملف المفتوح Raafat-2.ma يمكن تكرار تخزينه ويتم ذلك بـــالضغط مباشرة على الاختيار Save وفى هذه الحالة يتم التخزين مباشرة دون ظهور النافذة الخاصة بالأمر Save ويمكن عمل ذلك مباشرة بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز الموجـــود فى قائمة الأدوات ويمكن حفظ الملف تحت أسم آخر وذلك بالضغط على الاختيار Save As . ولطباعة الملف على الورق نضغط بالفارة على الخيـــار Print مـــن القائمـــة العموديـــة

File (أو بالضغط مباشرة على الرمز من قائمة الأدوات) فيظهر صندوق حوارى كما في الشكل (١٢)



شكل (١٢)

وبواســــطة مؤشر الفارة يتم الانتقال الى الخيارات الفرعية داخل الصندوق الحوارى

لتحديد عدد النسخ المطلوبة

ولتحديد الصفحات المطلوب طباعتها على الورق

وتتم الطباعة على الورق بالضغط على موافق

وبنفس الطريقة يمكن التحول الى آي قائمة فى صف القائمة الرئيسية وتنفيذ كل ما فيهــــا مــــن مهام .

ومن المميزات الهامة فى برنامج ماثيماتيكا انه بالإضافة الى الدوال الكثيرة الموجودة فى قلب ماثيماتيكا والتى تشمل العديد من فروع الرياضيات فإنه يمكن للمستخدم تعريف الـــدوال الخاصة به وذلك لان ماثيماتيكا يستخدم كلغة برمجة وكذلـــك توجـــد حـــزم **packages** لموضوعات متخصصة في الرياضيات وكل حزمة تحتوى على تعريفات رياضية للدوال متخصصة في فرع دقيق من الرياضيات فمثلا توجد حزم متخصصة فى كل من الفروع الآتية :

Algebra	الجبر
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Geometry	الهندسة
Linear Algebra	الجبر الخطى
Number Theory	نظرية الأعداد
Numerical Analysis	والتحليل العددى
Vector Analysis	تحليل المتجهات
Statistics	الإحصاء
Linear Programming	البرمجة الخطية
Fourier Transforms	تحويلات فوريير
Laplace Transforms	تحويلات لابلاس

ويتم استدعاء الحزمة عن طريق إرسال الأمر **<< PackageName**

حيث **PackageName** تمثل اسم الحزمة المطلوب استدعائها .

٤ . التعبيرات فى ماثيماتيكا
Mathematica and Expressions

برنامج ماثيماتيكا يتعامل مع أنـــــواع عديدة ومختلفة من الأشياء مثل الصيغ الرياضية **mathematical formulas** والقوائم **lists** والرسوم **graphs** وعلى الرغم مـــن أن هذه الأشياء غالبا ما تبدو مختلفة لكن ماثيماتيكا يتعامل معها جميعا بشكل قياسي فى صـــــورة تعبيرات **expressions** فمثلا **f[x]** يمثل تعبير فى ماثيماتيكا لتعريف دالـــة **f(x)** هـــذه الدالة لها الاسم **f** وذات متغير واحد **x** كذلك **g[x,y]** تمثل دالة **g(x,y)** لهـــا الاســـم **g** وذات متغيرين **x , y** . أيضا العملية الحسابية **x + y** تمثل تعبير فى ماثيماتيكا حيث يقوم القلب فى ماثيماتيكا بتحويله الى الشكل القياسى **Plus[x,y]** والدالة **Plus** تمثل اســـم دالة الجمع وعند طباعة الناتج مرة أخرى على الواجهة الأمامية يكتــــب بـــالصورة **x + y** وبالمثل المؤثرات الأخرى مثل الضرب والقسمة والرفع الى أس كل منها له شكل قياســـى .

X + y + z	Plus[x,y,z]
x y	Times[x,y]
x^n	Power[x,n]
{x,y,z}	List[x,y,z]
a->b	Rule[a,b]
a=b	Set[a,b]

بعض الأمثلة لتعبيرات فى ماثيماتيكا

وفي الحقيقة فإن كل شيء يتم كتابته فى الواجهة الأمامية لبرنامج ماثيماتيكا يعامل كتعبير له اسم يطلق عليه رأس التعبير Head وهذا الاسم قد يمثل

– عملية Operation مثل الجمع أو الطرح Plus ، الضرب أو القسمة Times

– بناء Structure مثل القائمة List

ويأخذ الاسم معامل argument أو اكثر Name[arguments] ويجب ملاحظة أن معاملات جميع الدوال في ماثيماتيكا توضع داخل أقواس مربعة من النوع [ ] .

للاستعلام عن أسم التعبير يستخدم الأمر **Head**

للاستعلام عن الشكل القياسى أو البناء الكامل للتعبير يستخدم الأمر **FullForm**

وفي الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة لاستخدام الأمر **Head** والأمر **FullForm**

عند تطبيق الدالة Head على العملية x+y+z فان الناتج يكون Plus	In[1]:=Head[x+y+z] Out[1]:Plus
عند تطبيق الدالة FullForm على العملية x+y+z فان الناتج يكون Plus[x,y,z]	In[2]:= FullForm[x+y+z] Out[2]=Plus[x,y,z]
عند تطبيق الدالة Head على العملية x*y فان الناتج يكون Times	In[3]:= Head[x*y] Out[3]=Times
عند تطبيق الدالة Head على العملية x*y+z والتى تشمل ضرب x*y ثم الجمع الى z فان الناتج يكون Plus والذى يمثل عنوان العملية النهائية	In[4]:= Head[x*y+z] Out[4]=Plus
عند تطبيق الدالة FullForm على العملية x*y+y فان الناتج يكون Plus[Times[x, y], z]	In[5]:= FullForm[x*y+z] Out[5]=Plus[Times[x, y], z]
عند تطبيق الدالة FullForm على العملية 4+5x^2 فان الناتج يكون Plus[4,Times[5,Power[x,2]]]	In[6]:=FullForm[4+5x^2] Out[6]=Plus[4,Times[5,Power[x,2]

إذا كان التعبير يحتوى على أجزاء متعددة ومتداخلة فيمكن التعرف على البناء الشجرى Tree Structure باستخدام الأمر Tree Form

```
In[7]:=TreeForm[x^3+(1+x)^2]
Out[7]=
       Plus[  |              ,   |                ]
           Power[x, 3]     Power[ |        , 2]
                                 Plus[1, x]
```

وعند تطبيق الدالة Head على عدد صحيح Integer أو عدد نسبى Rational أو عدد مركب Complex فإن الناتج يمثل نوع العدد .

عند تطبيق الدالة Head على العدد 25 فإن الناتج يكون عبارة صحيح Integer والتى تفيد نوع العدد المستخدم

```
In[8]:Head[25]
Out[8]:=Integer
```

عند تطبيق الدالة Head على العدد $\frac{3}{4}$ فإن الناتج يكون عدد نسبى Rational

```
In[9]:Head[3/4]
Out[9]:= Rational
```

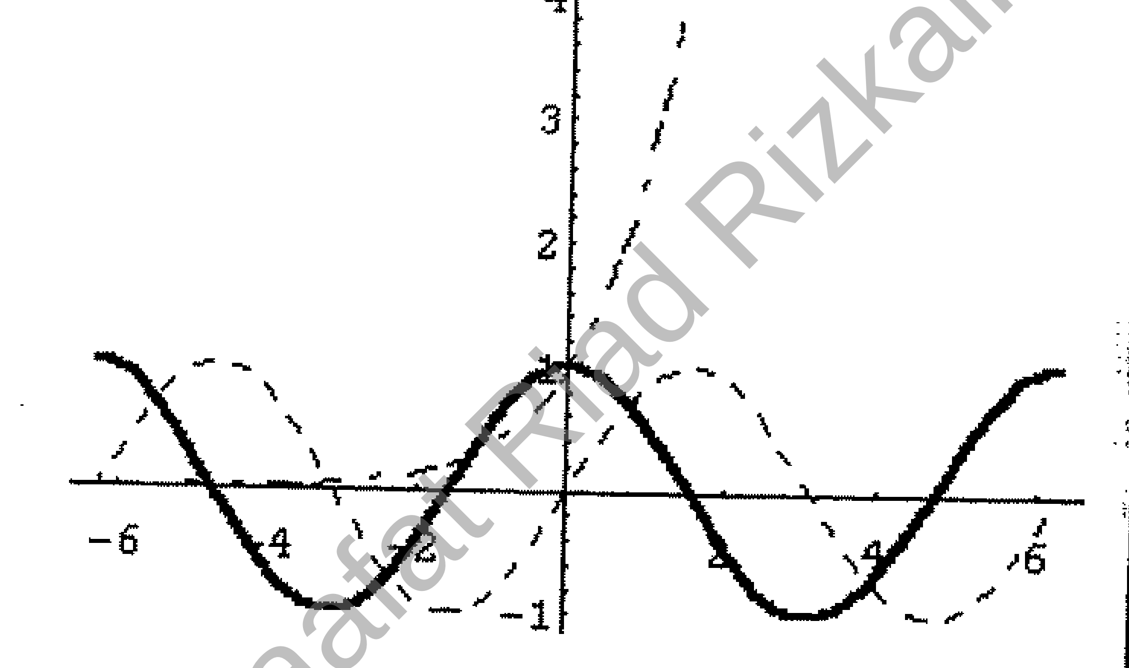
عند تطبيق الدالة Head على العدد 2.4 فإن الناتج يكون عدد حقيقى Real

```
In[10]:Head[2.4]
Out[10]:=Real
```

عند تطبيق الدالة Head على العدد 3+4I فإن الناتج يكون عدد مركب Complex

```
In[11]:Head[3+4I]
Out[11]:=Complex
```

الباب الثانى
ماثيماتيكا والدوال العددية



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . الحسابات العددية Numerical Calculations
٢ . الأنظمة العددية Number Systems
٣ . المتغيرات Variables
٤ . بعض الدوال الرياضية Some Mathematical Functions
٥ . الأعداد المركبة Complex Numbers

الباب الثانى

ماثيماتيكا والدوال العددية

برنامج ماثيماتيكا يحتوى على العديد من الدوال العددية وكما علمنا فإن ماثيماتيكا يتيح للمستخدم الاستعلام عن كافة الأوامر والدوال باستخدام الرمز ? لذلك يمكن استخدام هـذا الرمز للاستعلام عن جميع أوامر ودوال ماثيماتيكا لنتعرف على الصيغة العامة لكـل مـن هـذه الأوامر وسوف نعطى أمثلة توضيحية لكل أمر من هذه الأوامر ٠

١ـ الحسابات العددية Numerical Calculations

فى ماثيماتيكا يوجد أربعة أنواع من الأعداد وهى

- الأعداد الصحيحة Integers
- الأعداد النسبية Rational
- الأعداد الحقيقية Real
- الأعداد المركبة Complex

ويستخدم ماثيماتيكا رموز المؤثرات الحسابية المعروفة وهى

مؤثر الجمع	+
مؤثر الطرح	−
مؤثر الضرب	*
مؤثر القسمة	/
مؤثر الرفع الى أس	^

x^y	Power	الرفع إلى أس
x + y	Add	الجمع
x - y	Subtraction	الطرح
x y (or) x*y	Multiply	الضرب
x/y	Divide	القسمة

المؤثرات الحسابية في ماثيماتيكا

ويمكن استخدام ماثيماتيكا كأداة لأجراء العمليـــات الحسـابية تماما مثـل الآلـة الحاسـبة Calculator .

لحساب مجموع عددين

In[1]:=3.5+6.823

Out[1]= 10.323

لحساب خارج قسمة عددين

In[2]:=2.5/7.3

ونلاحظ أن الناتج عدد في الصورة العشرية

Out[2]= 0.342466

عند إدخال هذه الكمية الحسابية نلاحظ أن الناتج

In[3]:= (7^2-25*3)/(23+5^4)+42

عدد نسبي لأن الأعداد المستخدمة أعداد صحيحة

Out[3]= $\frac{13595}{324}$

وعند عمل الحسابات على الآلة الحاسبة العادية فإن النتائج تكون الى دقة معينة ، مثلا عشرة أرقام عشرية ، ولكن مع ماثيماتيكا غالبا ما نحصل على نتائج مضبوطة exact results .

في ماثيماتيكا نحصل على قيمة مضبوطة للعدد 2^{100} على الرغم من أن الناتج يحتوى على 31 رقم

In[4]:=2^100

Out[4]=1267650600228229401496703205376

وفي ماثيماتيكا يمكن الحصول على ناتج عددى تقريبى للكميات الحسابية وذلك باستخدام الأمر N كما يمكن الحصول على النتائج مقربة الى أي درجة دقة مطلوبة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
N[expr] **or** **expr//N**	للحصول على قيمة عددية للتعبير **expr**
N[expr,n]	للحصول على قيمة عددية للتعبير **expr** مقربة الى **n** من الأرقام العشــــرية
Rationalize[x]	للحصول على عدد نسبى **Rational** تقريبى للعدد **x**
Precision[x]	لمعرفة عدد الخانات العشرية **decimal digits** فى العدد **x**
Accuracy[x]	لمعرفة عدد الخانات المعنوية **Significant digits** على يمين العلامة العشرية فى العدد **x**

للحصول على قيمة عددية تقريبية للعدد 2^{100}

In[5]:=2^100//N
Out[5]= 1.26765 10^{30}

للحصول على 2^{100} مقربا الى 15 من الأرقام العشرية

In[6]:= N[2^100,15]
Out[6]= 1.26765060022823 10^{30}

للحصول على قيمة عددية تقريبية للكمية الحسابية المدخلة فى جملة الإدخال In[3]

```
In[7]:= N[%3]
Out[7]: 41.9599
```

ويمكن عمل ذلك بطريقة أخرى كما يلى

```
In[8] := (7^2-25*3)/(23+5^4)+42//N
Out[8]= 41.9599
```

وللحصول على الناتج من العملية الحسابية مقربا الى 20 رقم عشرى

```
In[9]:= N[(7^2-25*3)/(23+5^4)+42,20]
Out[9]= 41.959876543209876543
```

وللحصول على الناتج السابق فى صورة عدد نسبى تقريبى

```
In[10]:=Rationalize[%]
```

Out[10]= $\frac{13595}{324}$

لمعرفة عدد الخانات العشرية فى العدد الناتج من جملة الإدخال In[9]

```
In[11] := Precision[%9]
Out[11]= 20
```

لمعرفة عدد الخانات المعنوية على يمين العلامة العشرية فى العدد الناتج من جملة الإدخال In[9]

```
In[12] := Accuracy[%9]
Out[12]= 18
```

٢ . الأنظمة العددية Number Systems

النظام العشرى Decimal System يعتبر أقدم نظام عددى عرفه الإنســـان فقـــد ابتكره القدماء المصريين منذ حوالى 3400 سنة قبل الميلاد وهو من اشهر الأنظمة العددية وأكثرها انتشارا ، والأرقام المستخدمة فى النظام العشرى هى 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 وعددها عشرة أرقام لذلك فإن أساس Base النظام العشرى يساوى 10 ، ومـــع ظهـــور الحاسبات الآلية ظهرت الحاجة الى استخدام أنظمة عددية أخرى وفي الجدول الأتى نوضح بعض الأنظمة العددية وأساس كل نظام والأرقام المستخدمة فيه .

الأرقام المستخدمة	أساس النظام Base	النظام العددى
0 , 1	2	Binary System النظام الثنائى
0,1,2,3,4,5,6,7	8	Octal System النظام الثمانى
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f	16	Hexadecimal System النظام السداسى عشرى

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن تحويل الأعداد الصحيحة أو الكسرية بين الأنظمة العدديـــة المختلفة , وإذا كان أساس النظام الذى يتم التعامل معه اكبر من 10 فإنه يتم استخدام الحروف الأبجدية من a الى z حيث a تمثل 10 , b تمثل 11 , c تمثل 12 وهكذا ، ويتم التحويل بين الأنظمة العددية المختلفة كالآتي :

لتحويل العدد nnnnn من النظام ذو الأساس b الى النظام العشرى	b^^nnnnn
لتحويل العدد x من النظام العشرى الى النظام ذو الأساس b والناتج يحتوى على أساس النظام المحول أليه	BaseForm[x,b]

لتحويل العدد $(101101)_2$ من النظام الثنائي الى النظام العشرى

```
In[1]:=2^^101101
Out[1]=45
```

لتحويل العدد 45 من النظام العشرى الى النظام الثنائى

```
In[2]:=BaseForm[45,2]
Out[2]=101101 2
```

لتحويل العدد $(a3bf)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام العشرى

```
In[3]:= 16^^a3bf
Out[3]= 41919
```

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام الثنائى

```
In[4]:=BaseForm[16^^bf3,2]
Out[4]=101111110011 2
```

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام الثمانى

```
In[5]:=BaseForm[16^^bf3,8]
Out[5]= 5763 8
```

لتحويل العدد الكسرى $(10111.1101)_2$ من النظام الثنائى الى النظام العشرى

```
In[6]:=2^^10111.1101
Out[6]= 23.8
```

لتحويل العدد الحقيقى $\sqrt{2}$ من النظام العشرى الى النظام الثنائى

```
In[7]:=BaseForm[N[Sqrt[2]],2]
Out[7]= 1.0110101000001001111 2
```

وفى ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد فى الأنظمة العددية المختلفة •

حساب مجموع عددين فى النظام الثنائى والناتج يكون فى النظام العشرى

```
In[8]:=2^^1101001+2^^101111
Out[8]=152
```

حساب مجموع عددين فى النظام الثنائى والناتج يكون فى النظام الثنائى

```
In[9]:=BaseForm[2^^1101001+2^^101111,2]
Out[9]=10011000 2
```

حساب حاصل طرح عددين في النظام الثنائي والناتج في النظام الثنائي

In[10]:=BaseForm[2^^11011.1011-2^^101111.1001,2]

Out[10]=-10011.111 $_2$

حساب مجموع عددين في النظام الثماني والناتج يكون في النظام الثماني

In[11]:=BaseForm[8^^36.72+8^^74.02,8]

Out[11]=132.74 $_8$

حساب مجموع عددين في النظام السداسي عشرى

In[12]:=BaseForm[16^^af5.e6-16^^fe.9ab,16]

Out[12]=9f7.4b $_{16}$

حساب حاصل ضرب عددين في النظام الثنائي والناتج يكون في النظام العشرى

In[13]:=2^^101 2^^110

Out[13]=30

حساب خارج قسمة عددين في النظام الثنائي

In[14]:=BaseForm[2^^11011.101/2^^110.011,2]

Out[14]=100.01010101010101011 $_2$

حساب خارج قسمة عددين في النظام السداسي عشرى

In[15]:=BaseForm[16^^af6.ec4/16^^ec.fa3,16]

Out[15]=b.d83e $_{16}$

٣ . المتغيرات Variables

عند عمل الحسابات في ماثيماتيكا يكون من المفيد دائما إعطاء أسماء للقيم العددية أو للكميات الحسابية الناتجة ويتم ذلك بإدخال أسماء متغيرات **variables** لهذه القيم أو للكميات الحسابية .

x=value	لوضع القيمة **value** داخل المتغير **x**
x=y=value	لوضع القيمة **value** لكل من المتغيرات **x,y**
x=.	لحذف اى قيمة تم إحلالها من قبل للمتغير **x**

وعند اختيار أسماء للمتغيرات داخل ماثيماتيكا يجب مراعاة الأتي :

- في أسماء المتغيرات لا يوجد اى قيود على عدد الحروف أو الأرقام المستخدمة في أسم المتغير ويجب عدم استخدام العلامات الخاصة (+ , / , ^ , ...) في أسم المتغير .
- أسم المتغير لا يبداء بعدد فمثلا **2x** تمثل حاصل الضرب **2*x** بينما **x2** تمثل أسم لمتغير .
- في ماثيماتيكا يمكن استخدام الحروف الكبيرة والصغيرة **upper and lower-case letters** في أسماء المتغيرات ولكن يجب ان يبتداء أسم المتغير بحرف ابجدى صغير **lower-case letter** حتى لا يحدث تداخل بين أسماء المتغيرات التى نقوم بتعريفها وبين أسماء المتغيرات أو الدوال المعرفة داخل بناء ماثيماتيكا **built-in** .
- داخل العمل في ماثيماتيكا فإن أسم المتغير يحتفظ بالقيمة التى يتم إحلالها داخله حتى يقوم المستخدم بتغيرها أو حذفها فمثلا إذا وضعنا x=5 فإن ماثيماتيكا يفترض انك تريد دائما للمتغير **x** أن يكون له القيمة **5** داخل الدفتر **notebook** الذى نتعامل معه ألا إذا قمت بتغيرها أو حذفها .

In[1]:=x=5
Out[1]=x=5

لجعل المتغير x له القيمة 5 يكتب x=5

In[2]:=x^2
Out[2]=25

وعند ظهور x في أي عملية بعد ذلك سوف تستبدل بالقيمة 5

In[3]:=x=7
Out[3]=x=7

عند إعطاء قيمة جديدة للمتغير x فإنه يتم إلغاء القيمة السابقة والتعامل مع القيمة الجديدة .

In[4]:=x^2
Out[4]=49

عند حساب x^2 يتم التعامل مع القيمة الجديدة للمتغير x

In[5]:= x=.

يمكن إلغاء القيـــمة المخزنة في المتغير x باستخدام المؤثر =.

In[6]=x
Out[6]=x

وعند الاستعلام عن قيمة x يتم طبــــــــاعة x بدون قيمة

وفي ماثيماتيكا يمكن كتابة اكثر من عمليـــــة رياضية على سطر واحد بجملة إدخــــال واحدة بشرط أن يفصــــــل كل عملية عن الأخرى بالفاصلة المنقوطة (;) وفي هذه الحالــــة فإن ناتج التنفيذ يعطى ناتج آخر عملية تم إدخالها في السطر أما إذا انتهى سطر الإدخال بالفاصلة المنقوطة (;) فهذا يعني رغبة المستخدم في عدم ظهور الناتج •

إدخال اكثر من عملية رياضية على سطر واحد في جملة إدخال واحدة ونلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون ناتج آخر عملية مدخلة في السطر

```
In[7]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c
Out[7]=30
```

في حالة أنتها السطر بالفاصلة المنقوطة ; فإنه لا تظهر جملة الناتج

```
In[8]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c
```

ونعرض الآن بعض الملاحظات التي يجب مراعاتها عنداستخدام المتغيرات في ماثيماتيكا

x y تعنى حاصل ضرب المتغير x في المتغير y أي أن وجود مسافة بين المتغيرين يعنى أجراء عملية الضرب

xy تعنى متغير له الاسم xy

5x تعنى حاصل ضرب 5 فى المتغير x أي انه يمكن الأستغناء عن المسافة أو علامة الضرب * بين عدد ومتغير بشرط ان يكون العدد أولا

x5 تعنى متغير له الاسم x5

x^2y تعنى $x^2 y$ وليس x^{2y}

وفي لغات الحاسب المعروفة مثل لغة الفورتران FORTRAN أو لغة السي C فإنه يجب على المستخدم الإعلان Declaration عن أسماء المتغيرات قبل استخدامها فمثلا إذا كتبنا في برنامج فورتران جملة مثل x=5 وكان المتغير x لم يتم الإعلان عنه في بداية البرنامج فإن

مترجم لغة الفورتران يرفض ترجمة البرنامج ويعطى رسالة تفيد بوجود متغير لم يتم الإعلان عنه ، ولكن في برنامج ماثيماتيكا يختلف الوضع تماما حيث لا يطلب ماثيماتيكا الإعلان عن المتغيرات التى نستخدمها داخل العمل فى دفتر معين notebook وانما يقوم ماثيماتيكا بحفظ أسماء المتغيرات التى تدخل اليه مستخدما فى ذلك نظام السياقات Context الذى يشبه نظام الفهارس المستخدم فى نظام التشغيل DOS وهذا يعنى انه يمكن وضع كل مجموعة من المتغيرات في سياق معين وهذا النظام يتيح للمستخدم إعادة استخدام أسماء المتغيرات فى السياقات المختلفة وذلك لان الأسم الكامل لاي متغير هو الأسم الذى نعطيه له بالإضافة الى أسم السياق الذى نضعه فيه وهذا يتيح للمستخدم الحرية والسهولة فى التعامل مع المتغيرات داخل ماثيماتيكا دون الإعلان عنها . ومن اهم السياقات فى ماثيماتيكا السياق `Global وهو السياق الفعال عند تشغيل البرنامج ويضع فيه ماثيماتيكا كل المتغيرات التى نقوم بتعريفها ما لم ننص على وضعها فى سياق آخر , والسياق `System ويضع فيه ماثيماتيكا كل الأوامر والدوال الموجودة فيه built-in , ولكن يجب على المستخدم مراعاة حذف قيم المتغيرات التى تم الانتهاء من التعامل معها فى سياق معين حتى لا يحدث خطاء فى استخدام قيم لا نريدها للمتغيرات .

وضع القيمة 8 فى المتغير x

In[9]:=x=8;

للاستعلام عن التعريف الذى يحتفظ به ماثيماتيكا للمتغير x ومعرفة السياق الموجود به المتغير x

In[10]:=?x
Global`x
x=8

وبالإضافة الى المؤثرات الحسابية توجد المؤثرات العلاقية Relational Operators والتى تربط متغيرات أو تعبيرات رياضية ويكون الناتج كمية منطقية صواب True أو خطأ False .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
x=y	إحلال قيمة y داخل المتغير x
x= =y	اختبار ما إذا كان x يساوى y
x>y	اختبار ما إذا كان x اكبر من y
x>=y	اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يســـاوى y
x<y	اختبار ما إذا كان x اقل من y
x<=y	اختبار ما إذا كان x اقل من أو يســـاوى y
x!=y	اختبار ما إذا كان x لا تســـــاوى y

إحلال القيم 6,8,3 الى المتغيرات x , y , z
على الترتيب ثم اختبار ما إذا كان x > y – z
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

```
In[11]:=x=6;y=8;z=3;x>y-z
Out[11]= True
```

اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يساوى y
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

```
In[12]:=x>=y
Out[12]= False
```

كذلك يوجد نوع آخر من المؤثرات هو المؤثـرات المنطقيـة **Logical Operations** والتى تربط كميات منطقية **p , q** ويكون الناتج كمية منطقيـة صـواب **True** أو خطـأ **False** .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
!p	Not p
p&&q	p and q
p ‖ q	p or q

ومن المعلوم ان جدول الصواب والخطأ للمؤثرات العلاقية يكون فى الصورة

p	q	! p	p&&q	p ‖ q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

إحلال القيم **4,7,5** الى المتغيرات **a , b , c** على الترتيب

```
In[13]:= a=4;b=7;c=5;
```

اختبار ما إذا كان **b>=a+c and a<c**
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية **False**

```
In[14]:=b>=a+c&&a<c
Out[14]= False
```

اختبار ما إذا كان **b>=a+c or a<c**
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية **True**

```
In[15]:=b>=a+c || a<c
Out[15]= True
```

٤ . بعض الدوال الرياضيـة
Some Mathematical Functions

يوجد داخل بناء ماثيماتيكا اكثر من 1000 دالة معرفة الى جانب العديد من الدوال المعرفة فى حزم خارجية **External Packages** وهذه الدوال لها أسماء داخل ماثيماتيكا وفقا للقواعد الآتية :

- يتكون أسم الدالة من الكلمات الإنجليزية الكاملة لأسم الدالة أو الأختصار الرياضى لأسم الدالة .

- الحرف الأول من كل كلمة **word** فى أسم الدالة يكتب كبير **Capital** وباقى حروف الكلمة يكتب صغير **lower-case letter** .

- إذا انتهى أسم الدالة بالحرف **Q** فهذا يعنى ان الدالة تمثل سؤال منطقى وتكون الإجابة صواب **True** أو خطأ **False** .

ونتعرف الآن على بعض الدوال العددية الموجودة فى ماثيماتيكا ووظيفة كل منها ،

الدالة في ماثيماتيكـــــا	الدالة الرياضيـــــة
Sqrt[x]	دالة الجذر التربيعي $\sqrt{x}$
Exp[x]	الدالة الآسية e^x
Log[x]	دالة اللوغاريتم للأساس الطبيعي $\log_e x$
Log[b,x]	دالة اللوغاريتم للأساس b $\log_b x$
Sin[x] , Cos[x] , Tan[x] Csc[x] , Sec[x] , Cot[x]	الدوال المثـــلثـــيـــة **Trigonometric Functions** حيث x مقاسه بالتقدير الدائرى
ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x] ArcCsc[x] , ArcSec[x] , ArcCot[x]	الدوال المثـــلثـــيـــة العكسية **Inverse Trigonometric Functions**
Sinh[x] , Cosh[x] , Tanh[x] Csch[x] , Sech[x] , Coth[x]	الدوال الزائـــــــديــــــة **Hyperbolic Functions**
ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x] ArcCsch[x], ArcSech[x], ArcCoth[x]	الدوال الزائـــديـــــة العكســـية **Inverse Hyperbolic Functions**
Abs[x]	القيمة المطلقة $\lvert x \rvert$
Max[x1,x2,...]	إيجاد اكبر عدد من الأعداد x1 , x2 , ...
Min[x1,x2,...]	إيجاد اصغر عدد من الأعداد x1 , x2 , ...

حساب قيمة عددية للجذر التربيعي $\sqrt{3}$

In[1]:=Sqrt[3]//N
Out[1]=1.73205

حساب قيمة $e^{2.5}$

In[2]:=Exp[2.5]
Out[2]=12.1825

حساب قيمة $\log_2 256$

In[3]:=Log[2,]
Out[3]=8

حساب قيمة عددية لدالة الجيب $\sin(2)$

In[4]:=Sin[2]//N
Out[4]=0.909297

حساب قيمة دالة جيب التمام العكسية $\cos^{-1}(.5)$

In[5]:=ArcCos[.5]
Out[5]=1.0472

حساب قيمة عددية لدالة الجيب الزائدية sinh(4)

In[6]:=Sinh[4]//N
Out[6]=27.2899

حساب القيمة المطلقة $|-5|$

In[7]:=Abs[-5]
Out[7]=5

حساب العدد الأكبر من قائمة الأعداد {9,4,-6,3,8,12}

In[8]:=Max[9,4,-6,3,8,12]
Out[8]=12

حساب العدد الأصغر من قائمة الأعداد {9,4,-6,3,8,12}

In[9]:=Min[9,4,-6,3,8,12]
Out[9]= -6

وفي ماثيماتيكا يوجد بعض الثوابت الرياضية Mathematical Constants لها أسماء معينة

I	$i = \sqrt{-1}$
Infinity	∞
Pi	$\pi \cong 3.14159$
Degree	$\pi / 180$
E	$e \cong 2.71828$
GoldenRatio	$(1+\sqrt{5})/2 \cong 1.61803$

In[10]:=N[Pi^2]

Out[10]= 9.8696

لحساب القيمة العددية للثابت π مرفوع للأس **2**

In[11]:=Sin[Pi/2]

Out[11]=1

لحساب قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

In[12]:=Cos[60 Degree]//N

Out[12]=0.5

لحساب قيمة $\cos(60^{\circ})$ حيث الزاوية مقاسة بالتقدير الستيني

In[13]:=E^2//N

Out[13]=7.3890

لحساب قيمة e^2

الصيغة العامة للدالة فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى تقوم بها الدالة
Round[x]	للحصول على اقرب عدد صحيح من x
Floor[x]	للحصول على اكبر عدد صحيح اقل من أو يساوى x
Ceiling[x]	للحصول على اصغر عدد صحيح اكبر من أو يساوى x.

والجدول الآتي يوضح عمل هذه الدوال عند تطبيقها على بعض الأعداد

X	Round[x]	Floor[x]	Ceiling[x]
2.4	2	2	3
2.5	2	2	3
2.6	3	2	3
-2.4	-2	-3	-2
-2.5	-2	-3	-2
-2.6	-3	-3	-2

الصيغة العامة للدالة فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى تقوم بها الدالة
Mod[m, n]	إيجاد باقى خارج القسمة $\frac{m}{n}$ (m modulo n)
Quotient[m,n]	إيجاد الجزء الصحيح من خارج القسمة $\frac{m}{n}$
GCD[n1,n2,...]	إيجاد القاسم المشترك الأعلى **Greatest Common Divisor** للأعداد **n1 , n2 , ...**
LCM[n1,n2,...]	إيجاد المضاعف المشترك الأدنى **Least Common Multiple** للأعداد **n1 , n2 , ...**
Divisors[n]	إيجاد قائمة بالأعداد الصحيحة التى تقسم العدد **n**
Prime[k]	إيجاد العدد الأولى رقم **k**
PrimeQ[n]	إذا كان العدد **n** عدد أولى فإن الناتج يكون صواب **True** وخلاف ذلك يكون الناتج خطاء **False**

In[14]:=Mod[17,3]
Out[14]=2

حساب باقي قسمة 17 على 3

In[15]:=Quotient[17,3]
Out[15]=5

حساب الجزء الصحيح من خارج قسمة 17 على 3

In[16]:=GCD[12,16,24]
Out[16]=4

حساب القاسم المشترك الأعلى للأعداد 24 ,16 , 12
وهو يمثل اكبر عدد صحيح يقسم العددين

In[17]:=LCM[12,16,24]
Out[17]=48

حساب المضاعف المشترك الأدنى
للأعداد 24 , 16 , 12

In[18]:=Divisors[24]
Out[18]={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

عمل قائمة تحتوى على قواسم
العدد 24

In[19]:=Prime[100]
Out[19]=541

الحصول على العدد الأولى رقم 100

In[20]:=PrimeQ[81]
Out[20]=False

اختبار ما إذا كان العدد 81 عدد أولى

الصيغة العامة للدالة في ماثيماتيكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
n!	حساب دالة مضروب n
Binomial[n, m]	معامل ذات الحدين $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
Sign[x]	تحديد إشارة x وتكون +1 إذا كان x > 0 أو 0 إذا كان x=0 أو -1 إذا كان x < 0
Random[]	للحصول على عدد عشوائي محصور بين 0 , 1
Random[type, range]	للحصول على عدد عشوائي من النوع type وفي المدى range ، والنوع type قد يكون حقيقي Real أو صحيح Integer أو مركب Complex والمدى range يكون بالصورة {min , max}
Random[type, range,n]	للحصول على عدد عشوائي من النوع type وفي المدى range وبدقة n من الأرقام العشرية

In[21]:=30!

حساب قيمة مضروب 30

Out[21]=265252859812191058636308480000000

In[22]:=30!//N

حساب قيمة عددية تقريبية لمضروب 30

Out[22]=2.65253 10^{32}

In[23]:=Binomial[8,3]

حساب قيمة معامل ذات الحدين $\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,5!}$

Out[23]=56

In[24]:=Random[]

للحصول على عدد عشوائي محصور بين 1,0

Out[24]=0.440108

In[25]:=Random[Integer,{10,50}]

للحصول على عدد صحيح عشوائي محصور بين 50 , 10

Out[25]=32

In[26]:=Random[Real,{2.5,20},15]

للحصول على عدد حقيقي عشوائي محصور بين 20 , 2.5 وبدقة 15 رقم عشري

Out[26]=7.57929458180578

٥ . الأعداد المركبة Complex Numbers

في ماثيماتيكـــا يمكن التعامل مع الأعداد المركبـــــة التي على الصورة x + I y حيث I يمثل المقدار التخيلى $\sqrt{-1}$ وفيما يأتي نعرض بعض العمليات على الأعداد المركبة

العدد المركب x + iy	x + I y
الجزء الحقيقى من العدد المركب z	Re[z]
الجزء التخيلى من العدد المركب z	Im[z]
العدد المرافق للعدد المركب z	Conjugate[z]
القيمة المطلقة للعدد المركب z	Abs[z]
ســعـــة العدد المركب z حيث $z = \lvert z \rvert e^{i \arg(z)}$	Arg[z]

بعض العمليات على الأعداد المركبة

ويقوم ماثيماتيكا بأجراء العمليات الجبرية على الأعداد المركبة من جمع وطرح وضرب وقسمة وكذلك يمكن حساب قيمة الجذر التربيعي والدوال الآسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية فى حالة الأعداد المركبة .

حساب الجزر التربيعي للعدد التخيلى 4-

والناتج هو العدد التخيلى 2I

```
In[1]:=Sqrt[-4]
Out[1]=2I
```

حساب القيمة العددية للجذر التربيعي للعدد المركب 3+2I

```
In[2]:=Sqrt[3+2I]//N
Out[2]= 1.81735 + 0.550251 I
```

حساب القيمة العددية للدالة الآسية المركبة e^{2+7I}

```
In[3]:=Exp[2+7I]//N
Out[3]=5.57063 + 4.85451 I
```

حساب قيمة log(-2)

ونلاحظ أن الناتج يكون عدد مركب

```
In[4]:=Log[-2]
Out[4]:=I Pi + Log[2]
```

وحساب القيمة العددية للمقدار المركب log(-2)

```
-In[5]:=Log[
2]//N
Out[5]=0.693147 + 3.14159 I
```

حساب القيمة العددية للدالة اللوغاريتمية المركبة log(3+4I)

```
In[6]:=Log[3+4I]//N
Out[6]=1.60944 + 0.927295 I
```

لحساب القيمة المطلقة للعدد المركب 2 + 3 I

```
In[7]:=Abs[2+3I]
Out[7]= Sqrt[13]
```

وحساب القيمة العددية لدالة القيمة المطلقة $|2 + 3\ I|$

```
In[8]:=Abs[2+3I]//N
Out[8]=3.60555
```

لتعريف الأعداد المركبة z1 , z2

```
In[9]:=z1=3+5I;z2=4-6I;
```

لحساب مجموع العددان المركبان z1 + z2

```
In[10]:=z1+z2
Out[10]=7 - I
```

لحساب حاصل ضرب العددان المركبان z1 x z2

```
In[11]:=z1 z2
Out[11]=42 + 2 I
```

لحساب خارج قسمة العددان المركبان $\frac{z\,1}{z\,2}$

In[12]:=z1/z2

Out[12]= $-\frac{9}{26}+\frac{19}{26}\ I$

لحساب قيمة عددية لخارج قسمة العددان المركبان

```
In[13]:=z1/z2//N
Out[13]=-0.346154 + 0.730769 I
```

لحساب سعة العدد المركب z1

```
In[14]:=Arg[z1]//N
Out[14]=1.03038
```



الباب الثالث

ماثيماتيكا والجبر

في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials & Rational Functions

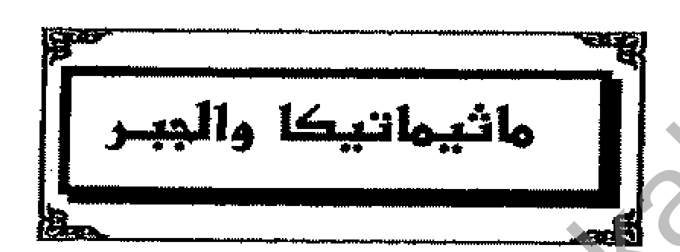
٢ . المتسلسلات Series

٣ . حل المعادلات Solving Equations

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

أولا : القوائم Lists
ثانيا : المصفوفات Matrices
ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems
رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

الباب الثالث



من الأشياء الهامة في برنامج ماثيماتيكا هو المقدرة على القيام بالحسابات على المقادير الرمزية **Symbolic** الى جانب المقادير العددية **Numeric** وهذا يعني أن ماثيماتيكا يستطيع التعامل مع الصيغ والمقادير الجبرية تماما مثل التعامل مع الأعداد .

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية
Polynomials and Rational Functions

برنامج ماثيماتيكا يقدم عدد كبير من الأوامر للتحويل بين الأشكال المختلفة للتعبيرات الجبرية وأجراء العمليات الجبرية على كثيرات الحدود **Polynomials** وسوف نتعرف فيما يأتي على بعض هذه الأوامر مع توضيح الوظيفة والصيغة العامة لكل من هذه الأوامر ونعطي أمثلة توضيحية .

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تحليل كثيرة الحدود Poly الى قوى صحيحة	Factor[poly]
إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى البسط للتعبير expr	Expand[expr]
إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى كل أجزاء التعبير expr	ExpandAl[expr]
توحيد المقامات denominators للكسور الموجودة فى التعبير expr	Together[expr]
كتابة التعبير الكسرى expr على صورة مجموع لكسوره الجزئية	Apart[expr]
إيجاد صورة مبسطة للتعبير expr بأصغر عدد ممكن من الأجزاء	Simplify[expr]
تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى x فى التعبير expr	Collect[expr,x]

لتحليل كثيرة الحدود x^2+2x-3 إلى عواملها

```
In[1]:=Factor[x^2+2x-3]
Out[1]= (x+3)(x-1)
```

الأمر Expand هو عكس الأمر Factor ويقوم بفك الأقواس

```
In[2]:=Expand[%]
```

Out[2]= x^2+2x-3

لتحليل كثيرة الحدود $8x^3+36x^2+54x+27$ إلى عواملها

```
In[3]:=Factor[8x^3+36x^2+54x+27]
```

Out[3]= $(3+2\,x)^3$

تعريف المقدار الجبرى rrr ثم إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود فى البسط للمقدار الجبرى rrr

```
In[4]:=rrr=(x-1)^2 (x+2)/((x+1)(x-3)^2);Expand[rrr]
```

Out[4]= $\frac{2}{(-3+x)^2(1+x)}-\frac{3x}{(-3+x)^2(1+x)}+\frac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

توحيد المقامات للكسور الموجودة في المقدار

In[5]:=Together[%]

الجبرى الناتج من جملة الإخراج السابقة

Out[5]: $\frac{2-3x+x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود في كل المقدار الجبرى rrr

In[6]:=ExpandAll[rrr]

Out[6]= $\frac{2}{9+3x-5x^\wedge2+x^\wedge3}-\frac{3x}{9+3x-5x^\wedge2+x^\wedge3}+\frac{x^3}{9+3x-5x^\wedge2+x^\wedge3}$

كتابة المقدار الجبرى rrr في صورة كسوره الجزئية

In[7]:=Apart[rrr]

Out[7]= $1+\frac{5}{(-3+x)^2}+\frac{19}{4(-3+x)}+\frac{1}{4(1+x)}$

تبسيط شكل الناتج من جملة الإخراج السابقة Out[7]

In[8]:=Simplify[%7]

Out[8]= $\frac{(-1+x)^2(2+x)}{9+3x-5x^\wedge2+x^\wedge3}$

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Collect[expr, x]	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قسوى x فسى التعبير expr
Coefficient[expr, form]	الحصول على معامل form فى كثيرة الحسدود expr
Length[expr]	الحصول على عدد العناصر الموجودة فسى التعبسير expr
Exponent[expr,form]	الحصول على اكبر قوى للمقدار form فى التعبير expr

إيجاد مفكوك المقدار الجبرى $(2x + y + 1)^2$ ووضع الناتج فى المتغير r1

In[9]:=r1=Expand[(2x+y+1)^2]

Out[9]= $1 + 4x + 4x^2 + 2y + 4xy + y^2$

تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى المتغير y فى التعبير الجبيرى r1

In[10]:=Collect[r1,y]

Out[10]= $1 + 4x + 4x^2 + (2 + 4x)y + y^2$

للحصول على معامل y فى التعبير الجبرى r1

In[11]:=Coefficient[r1,y]

Out[11]=2 + 4 x

للحصول على أكبر قوى للمتغير y فى التعبير الجبرى r1

In[12]:=Exponent[r1,y]

Out[12]=2

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Numerator[expr]	الحصول على البسط فى التعبير expr
Denominator[expr]	الحصول على المقام فى التعبير expr
PolynomialQuotient[p, q, x]	إيجاد خارج قسمة p على q مع إهمال الجزء الباقى حيث p , q كثيرات حدود فى المتغير x
PolynomialRemainder[p, q, x]	إيجاد الجزء الباقى من خارج قسمة p علـى q حيث p , q كثيرات حدود فى المتغير x

للحصول على البسط فى التعبير الجبرى rrr

In[13]:=Numerator[rrr]

Out[13]=$(-1+x)^2$ (2+x)

للحصول على المقام فى التعبير الجبرى rrr

In[14]:=Denominator[rrr]

Out[14]=$(-3+x)^2$ (1+x)

تعريف كثيرتى حدود p,q ثم إيجاد خارج قسمة كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q مع إهمال الجزء الباقى

In[15]:= p=x^3+5x^2+4x-6;q=x+1;

PolynomialQuotient[p,q,x]

Out[15]=$4x^2$ +x

للحصول على الجزء الباقى من خارج قسمة كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q

In[16]:=PolynomialRemainder[p,q,x]

Out[16]= -6

٢ . المتســلســلات Series

في كثير من المســـــائل الرياضية تنشـــأ عمليات جمع وضرب للحدود المنتظمة وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب مثل هذه العمليات . ولحساب مجموع حدود المتسلســـلة يســـتخدم الأمر Sum كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Sum[f, {i, imax}]	حســـــاب المجموع $\sum_{i=1}^{i\,max} f$
Sum[f, {i, imin, imax}]	حســـــاب المجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$
Sum[f, {i,imin, imax, step}]	حســاب المجمــوع $\sum_i f$ مــن i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step
Sum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, . . .]	حساب المجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} \sum_{j=j\,min}^{j\,max} f$

لحساب مجموع العشرة حدود الأولى من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$

```
In[1]:= Sum[1/i^2,{i,1,10}]//N
Out[1]=1.54977
```

ويمكن حســـــاب مجموع عدد لانهائي من المتسلسلة بشرط أن تكون المتسلسلة تقاربية

```
In[2]:= Sum[i/I^2,{i,1,Infinity}]//N
Out[2]= 1.64493
```

لحساب المجموع $\sum_{i=1}^{7} \frac{x^i}{i!}$

```
In[3]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}
```

Out[3]= $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040}$

لحساب مجموع $\sum \frac{x^i}{i!}$ من i=2 الى i=7

بخطوة step=2

```
In[4]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]
```

Out[4]= $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب المجموع المزدوج $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} x^i y^j$

```
In[5]:=Sum[x^i y^j,{i,1,3},{j,1,i}]
```

Out[5]= $xy+x^2y+x^2y^2+x^3y+x^3y^2+x^3y^3$

ويمكن لماثيماتيكا أجراء عمليات الضرب على الحدود المنتظمة باستخدام الأمر Product كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Product[f,{i, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax, step}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$ بخطوة مقدارها step
Product[f,{i,imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	حساب حاصل الضرب المزدوج $\prod_{i=imin}^{imax} \prod_{j=jmin}^{jmax} f$

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5} i^2$

In[6]:=Product[i^2,{i,1,5}]

Out[6]=14400

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{4} (x+i)$

In[7]:=Product[x+i,{i,1,4}]

Out[7]=(1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x)

لحساب حاصل $\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{i} (x+i)^j$

In[8]:=Product[(x+i)^j,{i,1,3},{j,1,i}]

Out[8]=(1 + x) $(2 + x)^3$ $(3 + x)^6$

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حســـــاب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x= x_0$ لأي عدد n من الحدود وكذلك حساب مفكوك تيلور لدالة فـــى متغـــيرين $f(x,y)$ حول النقطة (x_0, y_0) وذلك باستخدام الأمر **Series** كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مفكوك متسلســـلة القوى للدالة f حول النقطة x_0 حتى الحد $(x-x_0)^n$	Series[f, {x, x0, n}]
حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة f علـــى التتابع بالنسبة الى y ثم الى x	Series[f, {x, x0, nx}, {y,y0, ny}]
تحويل expr الى الشكل العادى بدون أي رموز خاصة	Normal[expr]

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ حتى الحدود من الدرجـــة الثالثة

In[9]:=Series[f[x],{x,a,3}]

Out[9]=

$$f[a]+f'[a](-a+x)+\frac{f`[a](-a+x)^2}{2}+\frac{f^{(3)}[a](-a+x)^3}{6}+O[-a+x]^4$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^x حول النقطة $x = 0$ حتى الحدود من الدرجة الرابعة

In[10]:=Series[Exp[x],{x,0,4}]

Out[10]= $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$

ويمكن إلغاء الحد $O[x]^5$ وكتابة المفكوك في الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر **Normal**

In[11]:=Normal[%]

Out[11]= $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^{xy} حول النقطة $x = 0$, $y = 0$ حتى الحدود من الدرجة الثالثة في **x** والدرجة الثانية في **y**

In[12]:=Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]

Out[12]= $1+(y+O[y]^3)\,x+(\frac{y^2}{2}+O[y]^3)\,x^2+O[x]^3$

ويمكن كتابة المفكوك في الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر **Normal**

In[13]:=Normal[Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]]

Out[13]= $1+x\,y+\frac{x^2\,y^2}{2}$

٣ . حل المعادلات Solving Equations

في برنامج ماثيماتيكا المعادلة يكون لها الشكل **lhs == rhs** حيث يستخدم المؤثر العلاقي == وهو يعني اختبار ما إذا كان الطرف الأيمن **rhs** يساوي الطرف الأيسر **lhs** ولذلك فإن المعادلات في ماثيماتيكا تعامل على أنها تعبيرات منطقية **Logical Statement** .

فمثلا عند إدخال المعادلة 2+3==5 فإن الناتج يكون صواب **True**

```
In[1] := 2+3= =5
Out[1]= True
```

وعند إدخال المعادلة $x^2 + 3x == 2$ فإن ماثيماتيكا يقوم بإخراج المعادلة في صورة رمزية لأنه لم يستطع اختبار ما إذا كان $x^2 + 3x = 2$ صواب أو خطأ نظرا لعدم وجود قيمة سابقة للمتغير **x** .

```
In[2] := x^2+3x= =2
Out[2]= x^2 +3x==2
```

والآن لحل المعادلة والحصول على قيم **x** التي تمثل جذور المعادلة نستخدم الأمر **Roots** كالآتي :

Roots[lhs= =rhs,var]	للحصول على قائمة تحتوي على جذور المعادلة **lhs= =rhs** بالنسبة للمتغير **var** .

الحصول على جذور المعادلة $x^2+3x==2$ ونلاحظ أن الناتج يكون على صورة تعبير منطقى

```
In[3]:=Roots[x^2+3x= =2,x]
Out[3]=
```

$$x == \frac{-3-Sqrt[17]}{2} \;\|\; x == \frac{-3+Sqrt[17]}{2}$$

وكثيرا ما نحتاج الى استخدام الحل الناتج فى حسابات أخرى لذلك يكون من المفيد تحويل الحل من التعبير المنطقى الى صورة صريحة ويتم ذلك باستخدام الدالة ToRules

لتحويل حل eqns الناتج من الأمر Roots من الصورة المنطقية الى متتابعة من القوائم تحتوى على قواعد صريحة للحل	ToRules[eqns]
لتحويل حل eqns الناتج من الأمر Roots من الصورة المنطقية الى قائمة تحتوى على قواعد صريحة للحل	{ToRules[eqns]}

لتحويل الحل الناتج من جملة 3 الى متتابعة تحتوى على قواعد صريحة للحل

```
In[4]:=ToRules[%3]
Out[4]=
```

$$Sequence[\{x->\frac{-3 - Sqrt[17]}{2}\}, \{x->\frac{-3 + Sqrt[17]}{2}\}]$$

ولتحويل الكسور الاعتيادية فى الحل إلى كسور عشرية والحصول على قيم عددية نستخدم الدالة N

```
In[5]:={ToRules[Roots[x^2+3x= =2,x]]}// N
Out[5]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}
```

ويمكن حل المعادلة والحصول على جذورها باستخدام الأمر **Solve** كالآتي :

Solve[eqn, var]	حل المعادلة **eqn** بالنسبة للمتغير **var**

وتعتبر معادلات كثيرات الحدود **polynomial equations** من أهم المعادلات التي يتم حلها باستخدام الأمر **Solve** .

للحصول على جذور المعادلة $x^2 + 3x = 2$ بالنسبة للمتغير **x**

In[6]:=Solve[x^2+3x= =2,x]

Out[6]= $\{x\text{--} > \dfrac{-3 - Sqrt[17]}{2}\}, \{x\text{--} > \dfrac{-3 + Sqrt[17]}{2}\}$

لحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 6

In[7]:= N[%6]

Out[7]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}

للحصول على جذور المعادلة $a\,x + b = c$ بالنسبة للمتغير **x**

In[8]:=Solve[a x+b= =c,x]

Out[8]= $\{\{x \text{ ->} -(\dfrac{b-c}{a})\}\}$

للحصول على جذور المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[9]:=Solve[a x^2+b x+c==0,x]

$$\text{Out[9]=} \left\{\left\{x->\frac{-b-\text{Sqrt}[b^2-4ac]}{2a}\right\},\left\{x->\frac{-b+\text{Sqrt}[b^2-4ac]}{2a}\right\}\right\}$$

للحصول على جـــــذور المعـــــادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[10]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x]

$$\text{Out[10]=}\{\{x->-2\},\{x->\frac{-1-I\,\text{Sqrt}[3]}{2}\},\{x->\frac{-1+I\,\text{Sqrt}[3]}{2}\}\}$$

ولحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 10

In[11]:=N[%]
Out[11]={{x -> -2.}, {x -> -0.5 - 0.866025 I}, {x -> -0.5 + 0.866025 I}}

ويمكن الحصول على جذور معينة من حل المعادلة باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

للحصول على الجذر الأول من حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[12]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[1]]
Out[12]={x -> -2}

للحصول على قيمة عددية للجذر الثانى من حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[13]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[2]]//N
Out[13]={x -> -0.5 - 0.866025 I}

والأمر Solve قادر على إيجاد حلول جبرية صريحة للعديد من معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية خاصة المعادلات التي يمكن تحليلها

In[14]:=equ1=Expand[Product[x-i,{i,5}]] تعريف كثيرة حدود من الدرجة الخامسة
Out[14]=-120 + 274 x - 225 x^2 + 85 x^3 - 15 x^4 + x^5

In[15]:=Solve[equ1= =0,x] حل معادلة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة
Out[15]={{x -> 1}, {x -> 2}, {x -> 3}, {x -> 4}, {x -> 5}}

نلاحظ أننا حصلنا على حل صريح لمعادلة كثيرة الحدود **equ1=0** من الدرجة الخامسة . وإذا كان ماثيماتيكا قادر على إيجاد حلول معادلة كثيرة حدود من درجة **n** فإنه يعطى **n** من الجذور حتى فى حالة وجود جذور مكررة كما فى المثال الآتى :

In[16]:=Solve[(x+3)(x-1)^2= =0,x]
Out[16]={{x -> -3}, {x -> 1}, {x -> 1}}

وفى حالة عدم استطاعة ماثيماتيكا الحصول على حلول جبرية صريحة فإن ماثيماتيكا تترك المعادلة فى صورتها الرمزية ويمكن فى هذه الحالة استخدام الدالة **N** للحصول على حلول عددية

In[17]:=Solve[x^5-130x+11= =0,x]
Out[17]={ToRules[Roots[-130 x + x^5 == -11, x]]}

In[18]:= Solve[x^5-130x+11= =0,x]//N
Out[18]={{x -> -3.39748}, {x -> -0.0211456 - 3.37698 I},
{x -> -0.0211456 + 3.37698 I}, {x -> 0.0846154}, {x -> 3.35515}}

وفي ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل بعض المعادلات التي ليست على صورة كثيرات حدود

In[19]:=Solve[Sqrt[1-x]+Sqrt[1+x]= =4,x]//N
Out[19]={{x -> -6.9282 I}, {x -> 6.9282 I}}

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل مجموعة من المعادلات في وقت واحد كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة فيها حيث eqns تكتب في صورة قائمة {lhs1= =rhs1,lhs2= =rhs2,...}	Solve[eqns]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars حيث vars تكتب في صورة قائمة {x1,x2,...}	Solve[eqns,vars]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars فقط وحذف المتغيرات elims من النتائج	Solve[eqns, vars, elims]

لحل المعادلتين بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة وهى x , y

In[20]:=Solve[{x+y= =1,x-3y= =2}]
Out[20]= $\{\{x->\frac{5}{4}, y->-\frac{1}{4}\}\}$

للحصول على قيمة عددية لحل المعادلتين بالنسبةإلى جميع المتغيرات

In[21]:=Solve[{x^2+y^2= =5,x+3y= =1}]//N
Out[21]={{x -> -2., y -> 1.}, {x -> 2.2, y -> -0.4}}

تعريف القائمة eqns1 وتحتوى على معادلتين فى ثلاث مجاهيل هم x , y , z ثم حساب الحل بالنسبة الى x , y فقط

```
In[22]:=eqns1={y-2x= =9,x+3z= =1}; Solve[eqns1,{x,y}]
Out[22]={{y -> 9 - 2 (-1 + 3 z), x -> 1 - 3 z}
```

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1 بالنسبة الى y , z فقط

```
In[23]:=Solve[eqns1,{y,z}]
```

Out[23]={{y -> 9 + 2 x, z -> $\frac{1 - x}{3}$ }}

تعريف القائمة eqns2 وتحتوى على ثلاث معادلات فى خمسة مجاهيل هم x , y , z , w , t ثم حساب الحل بالنسبة الى المتغيرات x , y , z فقط

```
In[24]:=eqns2={x+2y= =z,y+2z= =w,z+2w= =t};
        Solve[eqns2,{x,y,z}]

Out[24]={{x -> t - 2 w + 2 (-w - 2 (-t + 2 w)),
           y -> w + 2 (-t + 2 w), z -> t - 2 w}}
```

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1 بالنسبة الى المتغير x مع حذف المتغير z

```
In[25]:=Solve[eqns1,{x},{z}]
```

Out[25]={{x-> $\frac{-9 + y}{2}$}}

حساب حل مجموعة eqns1 بالنسبة إلى المتغير y مع حذف المتغير z

```
In[26]:=Solve[eqns1,{y},{z}]
Out[26]={{y -> 9 + 2 x}}
```

In[27]:=Solve[eqns2,{x},{t,w}] حساب حل مجموعة المعادلات eqns2
Out[27]={{x -> -2 y + z}} بالنسبة إلى المتغير x مع حذف المتغيرات t,w

In[28]:=Solve[eqns2,{w},{x,y}] حساب حل مجموعة المعادلات eqns2
Out[28]= $\{\{w -> \frac{t - z}{2}\}\}$ بالنسبة إلى المتغير w مع حذف المتغيرات x,y

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن حذف عدد من المتغيرات من مجموعة المعادلات وإعـــادة كتابتهـــا ويتم ذلك باستخدام الأمر **Eliminate** كالآتي :

Eliminate[eqns,elims] حذف المتغيرات **elims** من مجموعة المعادلات **eqns**

In[29]:=Eliminate[eqns1,x] حذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1
Out[29]=y = = 11 - 6 z

In[30]:=Eliminate[eqns1,z] حذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1
Out[30]=y = = 9 + 2 x

In[31]:= Eliminate[eqns2,{x,y}] حذف المتغيرات x,y من مجموعة المعادلات eqns2
Out[31]=t = = 2 w + z

In[32]:=Eliminate[eqns2,{w,t}] حذف المتغيرات w,t من مجموعة المعادلات eqns2
Out[32]=x = = -2 y + z

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

يعتبر الجبر الخطى جزء اساسى وهام فى دراسة الرياضيات والهندسة والفيزياء وعلوم أخرى ، وبرنامج ماثيماتيكا يقدم العديد من الأوامر للعمليات الجبرية الخاصة بالتعامل مع القوائم Lists والمصفوفات Matrices وحلول الأنظمة الخطية Linear Systems وحساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة .



من خلال دراستنا للعديد من الأوامر فى ماثيماتيكا مثل

Sum , Product , Series , ...

نلاحظ أن نطاق العمل فى هذه الأوامر يكتب باستخدام الأقواس { } على صورة قائمة List وتستخدم القوائم فى ماثيماتيكا بشكل كبير وبصفة خاصة عند عمل الحسابات عندما يكون هناك حاجة لتنظيم عدد كبير من القيم بغرض التعامل معها كوحدة واحدة ولذلك فإن ماثيماتيكا غنى بالعمليات التى يمكن تنفيذها على القوائم ، ولكى نتعرف على هذه العمليات نبدأ بتعريف قائمتين s1 , s2 كل قائمة تحتوى على خمسة عناصر

```
In[1]:=s1= { a , b , c, d , e }; s2= { 2 , 3 , 4 , 5 , 6};
```

وتنفيذ العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة على قائمتين يتم على العناصر المتناظرة فى القائمتين بشرط أن يكون القائمتين بهما نفس العدد من العناصر ونواتج العملية الحسابية يكون قائمة جديدة .

جمع القائمتين s1 , s2 يتم بجمع العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[2]:= s1+s2
Out[2]={2 + a , 3 + b , 4 + c , 5 + d , 6 + e}
```

طرح القائمتين s1 , s2 يتم بطرح العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[3]:= s1-s2
Out[3]={-2 + a, -3 + b, -4 + c, -5 + d, -6 + e}
```

ضرب القائمتين s1 , s2 يتم بضرب العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[4]:=s1 s2
Out[4]={2 a, 3 b, 4 c, 5 d, 6 e}
```

قسمة القائمتين s1 , s2 يتم بقسمة العناصر المتناظرة فى القائمتين

In[5]:=s1/ s2

Out[5]= $\{\frac{a}{2},\frac{b}{3},\frac{c}{4},\frac{d}{5},\frac{e}{6}\}$

ويمكن إجراء أي عملية حسـابية بين قائمة وعدد ثابت فمثلا جمع القائمة s1 على العدد الثابت 2 يتم بإضافة العـدد الثابت 2 الى كل عنصر فى القائمة

```
In[6]:= s1+2
Out[6]: {a+2 , b+2 , c+2 , d+2 , e+2}
```

ضرب القائمة s1 فى العدد الثابت 3 يتم بضرب العدد الثابت 3 فى كل عنصر من القائمة

```
In[7]:=3s1
Out[7]= {3 a, 3 b, 3 c, 3 d, 3 e}
```

ويمكن رفع القائمة الى أس عددى حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الى هذا الأس العددى

```
In[8]:=s2^2
Out[8]={4,9,16,25,36}
```

ويمكن رفع أي قيمة عددية الى أس عبارة عن قائمة

In[9]:= 2^s1

Out[9]= $\{2^a, 2^b, 2^c, 2^d, 2^e\}$

ويمكن رفع قائمة الى أس عبارة عن قائمة أخرى

In[10]:=s1^s2

حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الأساس الى أس يساوى العنصر المناظر له فى القائمة الأس

Out[10]= $\{a^2, b^3, c^4, d^5, e^6\}$

ويمكن تطبيق الدوال على القوائم حيث يتم تطبيق الدالة على كل عنصر فى القائمة

إيجاد الجذر التربيعى للقائمة s2 حيث يتم حساب الجذر التربيعى لكل عنصر فى القائمة

In[11]:=Sqrt[s2]//N
Out[11]= {1.41421, 1.73205, 2., 2.23607, 2.44949}

تطبيق دالة الجيب sin على القائمة s2

In[12]:=Sin[s2]//N
Out[12]={0.909297, 0.14112, -0.756802, -0.958924, -0.279415}

وماثيماتيكا قادر على أجراء عمليات الفئات Sets على القوائم من خلال العديد من الأوامـــر والجدول الآتي يوضح بعض الأوامر المستخدمة .

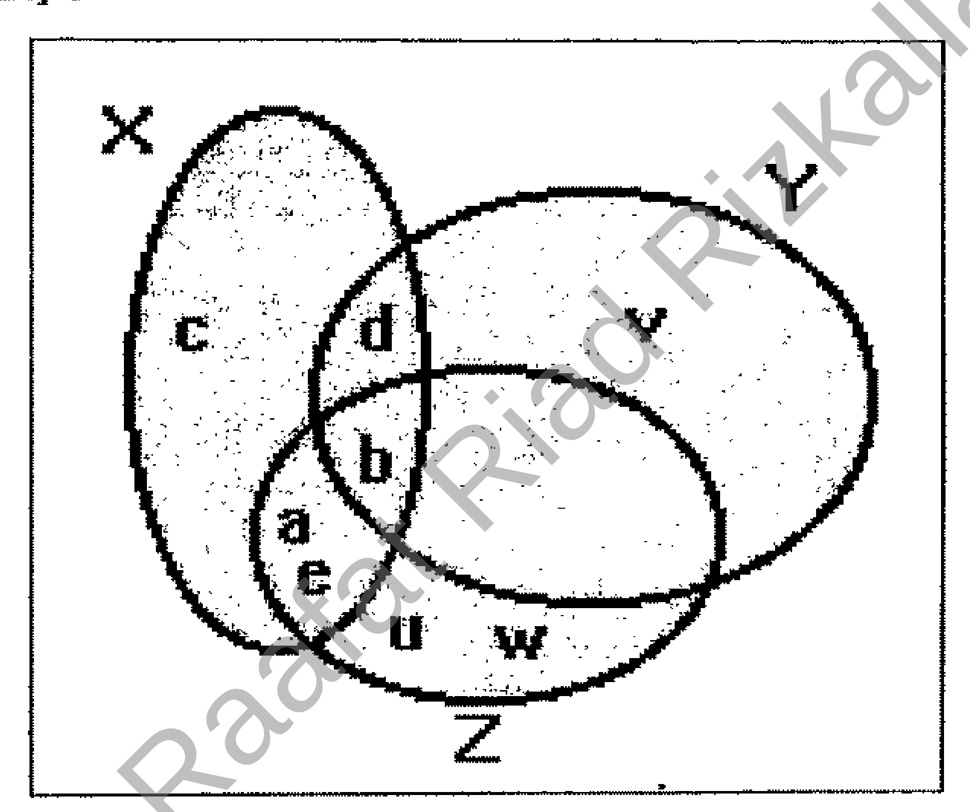
الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Length[list]	إيجاد عدد العناصر فى القائمة list
Sort[list]	ترتيب عناصر القائمة list حيث يتم أولا ترتيـــب الأعداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا
Join[list1, list2, ...]	إضافة القوائم ... ,list1 , list2 على بعضها بحيـــث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يســـاوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة
Union[list1, list2, ...]	اتحاد الفئات $list1 \cup list2 \cup list3 \cup ...$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم
Intersection[list1, list2, ...]	تقاطع الفئات $list1 \cap list2 \cap list3 \cap ...$
Complement[eall, e1, e2, ...]	إيجاد مكملة الفئة eall بالنسبة للفئات e1 , e2 , ... أي إيجاد العناصر فى الفئـــة eall والغـــير موجودة فى الفئات ... , e1 , e2
Partition[list, n]	تجزئ القائمة list الى قوائم فرعية متباعدة كل منها يحتوى على n من العناصر

ولتوضيح أوامر الفئات نفرض القوائم **X , Y , Z**

In[13]:=X={a,b,c,d,e};Y={b,d,v};Z={a,b,e,u,w};

لمعرفة عدد العناصر في X

In[14]:=Length[X]
Out[14]=5

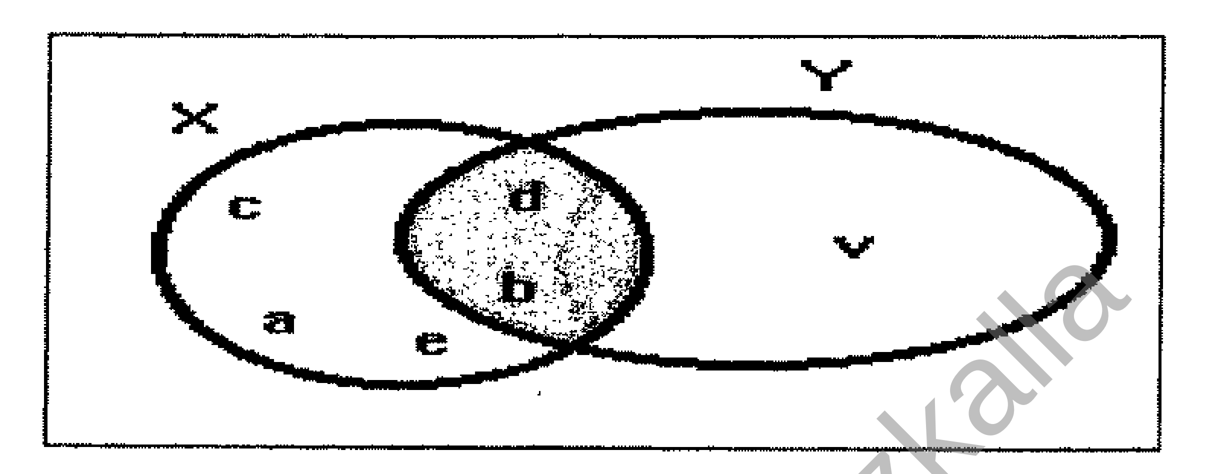


اضافة القوائم **X , Y , Z** معا بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة

In[15]:=Join[X,Y,Z]
Out[15]={a, b, c, d, e, b, d, v, a, b, e, u, w}

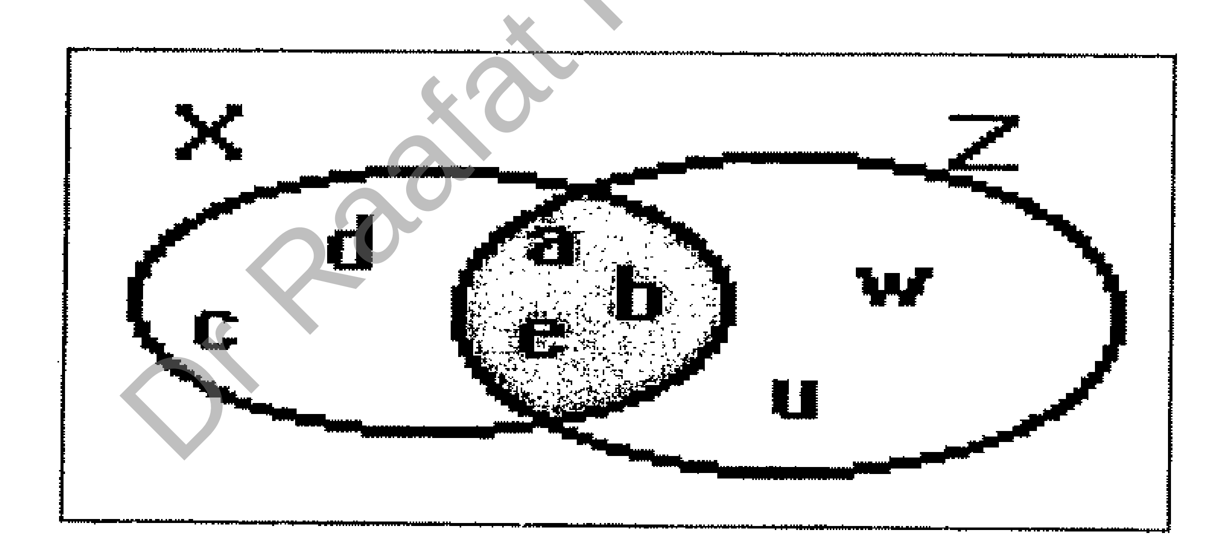
اتحاد الفئات $X \cup Y \cup Z$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم

In[16]:=Union[X,Y,Z]
Out[16]={a, b, c, d, e, u, v, w}



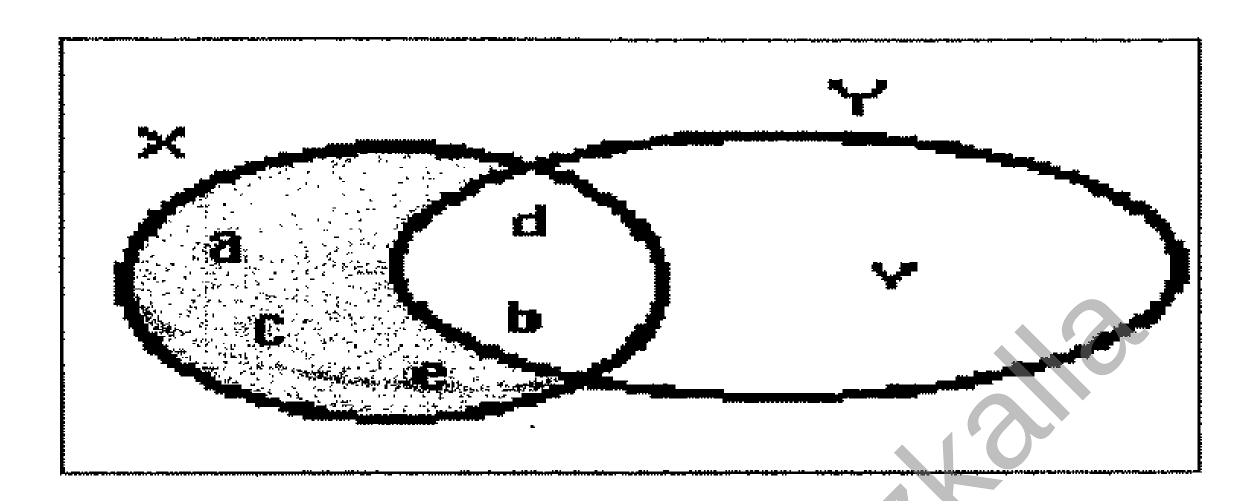
تقاطع الفئتان $X \cap Y$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Y

```
In[17]:=Intersection[X,Y]
Out[17]={b, d}
```



تقاطع الفئتان $X \cap Z$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Z

```
In[18]:=Intersection[X,Z]
Out[18]={a, b, e}
```



إيجاد مكملة الفئة X بالنسبة للفئة Y أي إيجاد العناصر فى الفئة X والغيرموجودة فى الفئة Y

```
In[19]:=Complement[X,Y]
Out[19]={a, c, e}
```

تجزئ الفئة Z الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصرين

```
In[20]:=Partition[Z,2]
Out[20]={{a, b}, {e, u}}
```

تجزئ الفئة Y الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصر واحد فقط

```
In[21]:=Partition[Y,1]
Out[21]={{b}, {d}, {v}}
```

ترتيب عناصر القائمة حيث يتم أولا ترتيب الأعـــداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا

```
In[22]:=Sort[{r,4,9,p,e,a,-7}]
Out[22]={-7, 4, 9, a, e, p, r}
```

ويمكن إضافة عناصر جديدة الى القوائم باستخدام الأوامر الآتية :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إضافة العنصر **elem** فى بداية القائمة **list**	**Prepend[list, elem]**
إضافة العنصر **elem** في نهاية القائمة **list**	**Append[list, elem]**
إضافة العنصر **elem** الى القائمة **list** فى الموضع رقم **n**	**Insert[list, elem, n]**

تعريف القائمة rrr

```
In[23]:=rrr={a,b,c,d,e};
```

إضافة العنصر x فى بداية القائمة rrr

```
In[24]:=Prepend[rrr,x]
Out[24]={x, a, b, c, d, e}
```

إضافة العنصر y إلى نهاية القائمة rrr

```
In[25]:=Append[rrr,y] ]
Out[25]={a, b, c, d, e, y}
```

إدخال العنصر z فى الموضع رقم 2 من القائمة rrr

```
In[26]:=Insert[rrr,z,2]
Out[26]={a, z, b, c, d, e}
```

ويمكن حذف عناصر من القوائم باستخدام الأمر Drop كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حذف n من العناصر من بداية القائمة list	Drop[list, n]
حذف n من العناصر من نهاية القائمة list	Drop[list, -n]
حذف العنصر رقم n من القائمة list	Drop[list,{n}]
حذف عناصر من القائمة list ابتداء من العنصر رقم m الى العنصر رقم n	Drop[list, {m, n}]

حذف ثلاثة عناصر من بداية القائمة r1

```
In[27]:=r1={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7};
        Drop[r1,3]
Out[27]={a4, a5, a6, a7}
```

حذف عنصران من نهاية القائمة r1

```
In[28]:=Drop[r1,-2]
Out[28]={a1, a2, a3, a4, a5}
```

حذف العنصر الرابع من القائمة r1

```
In[29]:=Drop[r1,{4}]
Out[29]={a1, a2, a3, a5, a6, a7}
```

حذف العناصر من العنصر الثالث الى العنصر السادس من القائمة r1

```
In[30]:=Drop[r1,{3,6}]
Out[30]={a1, a2, a7}
```

ويمكن تحديد عناصر معينة من القائمة وذلك باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

لتحديد العنصر الرابع من القائمة r1

```
In[31]:=r1[[4]]
Out[31]=a4
```

ولتحديد العنصران الرابع والسادس من القائمة r1

```
In[32]:=r1[[{4,6}]]
Out[32]={a4, a6}
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن توليد قوائم بناء على مواصفات تحددها له وذلك باستخدام الأمر **Table** كالآتي :

العمل الذي يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
عمل قائمة تحتوي على نسخ من expr عددها imax	Table[expr, {imax}]
عمل قائمة تحتوي على قيم expr ابتداء من i=1 حتى i=imax	Table[expr, {i, imax}]
عمل قائمة تحتوي على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax	Table[expr, {i, imin,imax}]
عمل قائمة تحتوي على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax بخطوة step مقدارها di	Table[expr, {i, imin, imax, di}]
عمل جدول من القوائم يحتوي على قيم expr في اكثر من بعد i , j , ...	Table[expr,{i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]
كتابة القائمة list في الشكل التقليدي للمصفوفة	TableForm[list]

ولتوضيح عمل الأمر Table نعطى الأمثلة الآتية :

لتوليد قائمة تحتوى على أربعة نسخ من الرمز x

```
In[33]:=Table[x,{4}]
Out[33]= {x, x, x, x}
```

لتوليد قائمة تحتوى على خمسة أعداد عشوائية في الفترة [0,1]

```
In[34]:=Table[Random[],5]
Out[34]=
{0.803812, 0.152706, 0.0624843, 0.59723, 0.192153}
```

لتوليد قائمة تحتوى على قيم i^2 من i=1 الى i=7

```
In[35]:=Table[i^2,{i,7}]
Out[35]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}
```

لتوليد قائمة تحتوى على المقدار الجبرى x^i + 2i x من i=3 الى i = 6

```
In[36]:=Table[ x^i + 2i x, {i,3,6}]
Out[36]=
```

$\{6\,x + x^3 , 8\,x + x^4 , 10\,x + x^5 , 12\,x + x^6 \}$

لتوليد قائمة عناصرها هي مكعبات الأعداد الزوجية المحصورة بين 2 , 8

```
In[37]:=Table[i^3 ,{i,2,8,2}]
Out[37]= {8, 64, 216, 512}
```

لتوليد قائمة m تحتوى على قيم i^2 + 2j حيث i=1,2,3 & j= 2,3,4,5

```
In[38]:=m=Table[i^2+2j,{i,3},{j,2,5}]
Out[38]:=
{{5, 7, 9, 11}, {8, 10, 12, 14}, {13, 15, 17, 19}}
```

ولعرض القائمة m في صورة جدول

```
In[39]:= TableForm[m]
Out[39]= 5    7    9    11
         8    10   12   14
         13   15   17   19
```

ثانيا : المصفوفات Matrices

المصفوفات والعمليات الخاصة بها تستخدم بشكل كبير في الرياضيات ويمكن الاستفادة من ماثيماتيكا في إجراء العمليات الرياضية الخاصة بالمصفوفات والتي كانت تستغرق الكثير من الوقت خاصة إذا كانت المصفوفات من أبعاد كبيرة . والمصفوفات في ماثيماتيكا عبارة عن قوائم من قوائم lists of lists فمثلا

– القائمة {a,b,c} تمثل المتجه (a,b,c) وهي مصفوفة من صف واحد وثلاثة اعمدة

– والقائمة {{a,b},{c,d}} تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة من صفين وعمودين

– والقائمة $\{\{a_1,a_2,a_3\},\{b_1,b_2,b_3\}\}$ تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وثلاثة اعمدة وهكذا ،

وبالتالى فانه يمكن إدخال عناصر المصفوفة بصورة القوائم ، ويحتوى ماثيماتيكا على الأوامر Table , Array والخاصة بتكوين مصفوفات ذات أبعاد مختلفة والأمر Table هو الأكثر استخداما .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Table[f,{i,m},{j,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn حيث m تمثل عدد الصفوف ، n تمثل عدد الأعمدة ، f تمثل دالة في i,j لتوليد عناصر المصفوفة
Array[f, n]	تكوين مصفوفة على شكل صف به n من العناصر على الصورة f[i]
Array[f, {m,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn على الصورة {f[i,j]} حيث f[i,j] يمثل العنصر فى الصف i والعمود j
MatrixForm[list]	طباعة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة

وفى ماثيماتيكا يمكن اجراء العمليات الحسابية من جمـــع وطـــرح وضـــرب علـــى المصفوفات ولتوضيح ذلك

تكوين مصفوفة علي شكل صف به 6 عناصر

In[1]:= Array[h,6]

Out[1]={h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6]}

تكوين مصفوفة 2x2 عناصرها على صورة aij

In[2]:=Array[a,{2,2}]

Out[2]={{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على الصورة $f_{ij} = 10\,i + j$ ثم عرض الناتـــج في الشـــكل التقليدى للمصفوفة

```
In[3]:=f=Table[10i+j,{i,3},{j,3}]
        ;MatrixForm[f]

Out[3]=  11  12  13
         21  22  23
         31  32  33
```

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على صورة m_{ij}

```
In[4]:=g=Array[m,{3,3}]

Out[4]={{m[1, 1], m[1, 2], m[1, 3]},
        {m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]},
        {m[3, 1], m[3, 2], m[3, 3]}}
```

حساب مجموع المصفوفتان g , f ثم عرض الناتـــج فى الشـــكل التقليدى للمصفوفة

```
In[5]:=MatrixForm[f+g]

Out[5]= 11 + m[1, 1]    12 + m[1, 2]    13 + m[1, 3]
        21 + m[2, 1]    22 + m[2, 2]    23 + m[2, 3]
        31 + m[3, 1]    32 + m[3, 2]    33 + m[3, 3]
```

حساب حاصل طرح المصفوفتان g , f ثم عرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[6]:=MatrixForm[f-g]

Out[6]= 11 - m[1, 1]    12 - m[1, 2]    13 - m[1, 3]
        21 - m[2, 1]    22 - m[2, 2]    23 - m[2, 3]
        31 - m[3, 1]    32 - m[3, 2]    33 - m[3, 3]
```

حساب حاصل ضرب المصفوفة g فى العدد 5

```
In[7]:=5g

Out[7]={ { 5 m[1, 1] , 5 m[1, 2] , 5 m[1, 3] },
         { 5 m[2, 1] , 5 m[2, 2] , 5 m[2, 3] },
         { 5 m[3, 1] , 5 m[3, 2] , 5 m[3, 3] } }
```

حساب خارج قسمة المصفوفة g على 3

In[8]:= g/3
Out[8]=

$$\{\{\frac{m(1,1)}{3},\frac{m(1,2)}{3},\frac{m(1,3)}{3}\},\{\frac{m(2,1)}{3},\frac{m(2,2)}{3},\frac{m(2,3)}{3}\},\{\frac{m(3,1)}{3},\frac{m(3,2)}{3},\frac{m(3,3)}{3}\}\}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفتان g , f

In[9]:= f . g

```
Out[9]= {{11 m[1, 1] + 12 m[2, 1] + 13 m[3, 1],
          11 m[1, 2] + 12 m[2, 2] + 13 m[3, 2],
          11 m[1, 3] + 12 m[2, 3] + 13 m[3, 3]},
         {21 m[1, 1] + 22 m[2, 1] + 23 m[3, 1],
          21 m[1, 2] + 22 m[2, 2] + 23 m[3, 2],
          21 m[1, 3] + 22 m[2, 3] + 23 m[3, 3]},
         {31 m[1, 1] + 32 m[2, 1] + 33 m[3, 1],
          31 m[1, 2] + 32 m[2, 2] + 33 m[3, 2],
          31 m[1, 3] + 32 m[2, 3] + 33 m[3, 3]}}
```

تعريف المصفوفة f1 من رتبة 3x2 وتعريف المصفوفة f2 من رتبة 2x4 ثم حساب حاصل ضرب المصفوفتان f1 , f2 وعرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة .

```
In[10]:= f1={{2,-1},{1,0},{-3,4}};f2={{1,-2,3,0},{3,4,0,1}};
         MatrixForm[f1.f2]
```

Out[10]=

-1	-8	6	-1
1	-2	3	0
9	22	-9	4

وفي ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الأساسية على المصفوفات كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مدور المصفوفة m	**Transpose[m]**
حساب قيمة محدد المصفوفة m	**Det[m]**
حساب مصفوفة المحددات المصاحبة من رتبة kxk من المصفوفة m	**Minors[m, k]**
حساب معكوس المصفوفة المربعة m	**Inverse[m]**
حساب m^k	**MatrixPower[m,k]**

حساب مدور المصفوفة g ثم عرض الناتج في الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[11]:=g1=Transpose[g];MatrixForm[g1]
Out[11]=  m[1, 1]   m[2, 1]   m[3, 1]
          m[1, 2]   m[2, 2]   m[3, 2]
          m[1, 3]   m[2, 3]   m[3, 3]
```

تعريف المصفوفة g2 من رتبة 2x2 ثم حساب قيمة المحدد

```
In[12]:=g2={{2,4},{1,7}};Det[g2]
Out[12]=10
```

حســــــــــاب معكوس المصفوفة g2

In[13]:=Inverse[g2]

Out[13]= $\{\{\frac{7}{10}, -(\frac{2}{5})\}, \{-(\frac{1}{10}), \frac{1}{5}\}\}$

لحساب $(g2)^3$

In[14]:=MatrixPower[g2,3]

Out[14]={{52, 284}, {71, 407}}

تعريف المصفوفة g3 من رتبة 3x3 ثم حساب مصفوفة المـحددات المصاحبة من رتبة 2x2 من المصفوفة g3

In[15]:=g3={{1,5,7},{2,4,3},{-1,6,0}}; Minors[g3,2]

Out[15]={{-6, -11, -13}, {11, 7, -42}, {16, 3, -18}}

حساب قيمة المحدد للمصفوفة g3

In[16]:=d=Det[g3] })

Out[16]=279

حســــــــــاب معكوس المصفوفة g3

In[17]:=Inverse[g3]

Out[17]=

$$\{\{-(\frac{18}{79}), \frac{42}{79}, -(\frac{13}{79})\}, \{-(\frac{3}{79}), \frac{7}{79}, \frac{11}{79}\}, \{\frac{16}{79}, -(\frac{11}{79}), -(\frac{6}{79})\}\}$$

f[i]	لتحديد الصف رقم i في المصفوفة f
f[[i,j]]	لتحديد العنصر f_{ij} بالصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة f
Sum[f[[i,i]],{i,n}]	لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة f من رتبة nxn
Transpose[f][[j]]	لتحديد العمود رقم j في المصفوفة f

تحديد الصف الثاني من المصفوفة g

```
In[18]:=g[[2]]
Out[18]={m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]}
```

لتحديد العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الأول في المصفوفة g

```
In[19]:=g[[3,1]]
Out[19]=m[3, 1]
```

لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة g

```
In[20]:=Sum[g[[i,i]],{i,3}]
Out[20]=m[1, 1] + m[2, 2] + m[3, 3]
```

In[21]:=Transpose[g][[3]] لتحديد العمود الثالث من المصفوفة g
Out[21]={m[1, 3], m[2, 3], m[3, 3]}

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا تكوين مصفوفات من اشكال مختلفة كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر القائمة list توضع فى قطر المصفوفة وباقى العناصر أصفار	DiagonalMatrix[list]
تكوين مصفوفة الوحدة من البعد nxn	IdentityMatrix[n]
تكوين مصفوفة صفرية من البعد mxn	Table[0,{m},{n}]
تكوين مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular عناصرها فى أعلى القطر 1 وخلاف ذلك أصفار	Table[If[i<=j,1,0],{i,m},{j,n}]

In[22]:=DiagonalMatrix[{a,b,c}] تكوين مصفوفة قطرية من القائمة {a,b,c}
Out[22]={{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}

In[23]:=IdentityMatrix[3] تكوين مصفوفة الوحدة من البعد 3x3
Out[23]={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

تكوين مصفوفة صفرية من البعد 3x2

```
In[24]:=Table[0,{i,3},{j,2}]
Out[24]={{0,0},{0,0},{0,0}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية عليا من البعد 3x3

```
In[25]:=Table[If[i<=j,1,0],{i,3},{j,3}]
Out[25]={{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية سفلى من البعد 4x4

```
In[26]:=Table[If[i>=j,1,0],{i,4},{j,4}]
Out[26]=
{{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 1, 1, 0},{1, 1, 1, 1}}
```

لعرض المصفوفة الناتجة من جملة الإدخـــال In[26] فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[27]:=MatrixForm[%26]
Out[27]= 1  0  0  0
         1  1  0  0
         1  1  1  0
         1  1  1  1
```

ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

نظرية المعادلات الخطية **linear equations** تلعب دورا هاما فى الجبر الخطى , وفى الحقيقة فإن دراسة مسائل عديدة فى الجبر الخطى يتم تحويلها الى دراسة نظام من المعادلات الخطية . والمعادلة الخطية هى معادلة لها الصورة $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ حيث x_i تمثل متغيرات , a_i أعداد حقيقية وتمثل معاملات المتغيرات , b عدد حقيقى ويمثل الحد الثابت .

وكثيرا ما نحتاج الى إيجاد حلول أنظمة من المعادلات الخطية , وفى بعض الحالات يكون من الأفضل كتابة المعادلات ثم حلها باستخدام الأمر **Solve** وفى حالات أخرى يكون من المفيد تحويل نظام المعادلات الخطية الى شكل مصفوفات **m . x = b** حيث x يمثل متجه المتغيرات , m يمثل مصفوفة المعاملات , b يمثل متجه الثوابت .

حل المعادلتين باستخدام الأمر **Solve** مباشرة

```
In[1]:=Solve[{x+5y==1,2x+y==3},{x,y}]
```

Out[1]= $\{\{x\text{->}\frac{14}{9}, y\text{->}-(\frac{1}{9})\}\}$

تعريف المصفوفة mat1 من رتبة 3x3

```
In[2]:=mat1={{2,1,-2},{3,2,2},{5,4,3}}
Out[2]={{2, 1, -2}, {3, 2, 2}, {5, 4, 3}}
```

تكوين نظام من ثلاث معادلات

```
In[3]:=mat1.{x,y,z}=={10,1,4}
Out[3]={2 x + y - 2 z, 3 x + 2 y + 2 z,
        5 x + 4 y + 3 z} == {10, 1, 4}
```

حل نظام المعادلات باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[4]:=Solve[%,{x,y,z}]
Out[4]={{x -> 1, y -> 2, z -> -3}}
```

حل نظام المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة

```
In[5]:= {x,y,z}=Inverse[mat1].{10,1,4}
Out[5]={1, 2, -3}
```

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حل نظام المعادلات الخطية فى صورة مصفوفة باســـتخدام الأمـــر **LinearSolve** كالآتي :

LinearSolve[m, b]	لايجاد متجه المتغيرات x الذى يحقق نظام المعادلات الخطية m . x = b

وعند التعامل مع مصفوفات من ابعاد كبيرة يكون من الافضل استخدام الأمر **LinearSolve** لحل نظام المعادلات .

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي:

```
In[6]:=LinearSolve[mat1,{10,1,4}]
Out[6]={1, 2, -3}
```

حيث **mat1** هي مصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ فى نظام المعادلات المعرف فى جملة الإدخال **In[3]** والحل يكون

$$x = 1 \;,\; y = 2 \;,\; z = -3$$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[7]:=mat2={{1,2,-3},{2,-1,4},{4,3,-2}};
       LinearSolve[mat2,{6,2,14}]
Out[7]={2, 2, 0}
```

والحل يكون $x = 2\ ,\ y = 2\ ,\ z = 0$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[8]:=mat3={{1,-3,4,-2},{0,2,5,1},{0,1,-3,0}};
       LinearSolve[mat3,{5,2,4}]
```

Out[8]= $\{\frac{157}{11},\frac{26}{11},-(\frac{6}{11}),0\}$

ونلاحظ أن نظام المعادلات يتكون من ثلاثة معادلات في أربعة مجاهيل وله عدد لا نهائي من الحلول لأنه تم حساب ثلاث مجاهيل بدلالة المجهول الرابع وناتج الحل يمثل حل نظام المعادلات بعد اخذ قيمة عددية للمجهول الرابع .

وإذا كان m مصفوفة مربعة فإننا نعلم من دراستنا في الجبر الخطي أن نظام المعادلات

$$m . x = b$$

يكون له حل وحيد لآي متجه ثوابت b إذا كان محدد المصفوفة m لا يساوى صفر بينما إذا كان محدد المصفوفة m يساوى صفر فهذا يعنى انه لا يوجد حل x يحقق نظام المعادلات m . x = b لقيمة خاصة للمتجه b وبمعنى آخر أن المعادلات تعتمد على بعضها dependent وفي هذه الحالة فإن مجموعة المتجهات x التي تحقق m . x = 0 تسمى الفراغ الصفرى nullspace للمصفوفة m أو kernel m وماثيماتيكا قادر على حساب متجهات الأساس Basis للفراغ الصفرى لمصفوفة وذلك باستخدام الأمر NullSpace كالآتي :

NullSpace[m]
لإيجاد متجهات أساس basis vectors جميع تركيباتها الخطية linear combinations تحقق المعادلة m . x = 0 حيث 0 هو المتجه الصفرى

```
In[9]:=mat4={{1,2,1},{2,4,2},{3,6,3}}
           ;Det[mat4]
Out[9]=0
```
محدد المصفوفة mat4 يساوى صفر

```
In[10]:=LinearSolve[mat4,{a,b,c}]
Out[10]=LinearSolve::nosol:
  Linear equation encountered which has no solution.
  LinearSolve[{{1, 2, 1}, {2, 4, 2}, {3, 6, 3}}, {a, b, c}]
```
الدالة LinearSolve لا تستطيع إيجاد حل نظام المعادلات

```
In[11]:=NullSpace[mat4]
Out[11]={{-1, 0, 1}, {-2, 1, 0}}
```
أساس الفراغ الصفرى للمصفوفة mat4 يحتوى على متجهان

ومن المميزات الهامة للأمر LinearSolve والأمر NullSpace هو التعامل مع مصفوفات من أي رتبة .

رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

القيم المميزة لمصفوفة m هي قيم λ التي تحقق المعادلة $m \cdot \lambda x = x$ حيث x متجه غير صفرى وفي هذه الحالة فإن المتجهات x التي تحقق هذه المعادلة تسمى المتجهات المميزة للمصفوفة m والتي تناظر القيمة المميزة λ ويمكن الحصول على القيم المميزة من حل كثيرة الحدود المميزة **Characteristic polynomial** وتعطى بالمعادلة

$$|m-\lambda J|=0$$

حيث J مصفوفة الوحدة ، وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لأي مصفوفة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
Eigenvalues[m]	تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة للمصفوفة m
Eigenvectors[m]	تكوين قائمة تحتوى على جميع المتجهات المميزة للمصفوفة m
Eigensystem[m]	تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m وتكون بالصورة **{ eigenvalue,eigenvector }**
Eigenvalues[N[m]]	تكوين قائمة تحتوى على قيم عددية تقريبية للقيم المميزة للمصفوفة m

تعريف المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

```
In[1]:=m={{1,2},{3,2}}
Out1]= {{1, 2}, {3, 2}}
```

```
In[2]:=Eigenvalues[m]
Out[2]= Eigenvalues::eival:
  Unable to find all roots of the characteristic polynomial.
  Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 2}}]
```

نلاحظ أن ماثيماتيكا لا يتمكن من حساب القيم المميزة للمصفوفة m لان عناصر المصفوفة أعداد صحيحة ويمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق كتابة الأعداد الموجودة فى المصفوفة بالصورة العشرية (فمثلا يكتب .3 بدلا من 3) كما يمكن عمل ذلك باستخدام الدالة N

القيم المميزة للمصفوفة m

```
In[3]:=Eigenvalues[N[m]]
Out[3]= {4., -1.}
```

المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[4]:=Eigenvectors[N[m]]
Out[4]= {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}
```

تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[5]:={values,vectors}=Eigensystem[N[m]]
Out[5]= {{4., -1.}, {{-0.5547,-0.83205},
        {-0.707107, 0.707107}}}
```

للتحقق من أن القيمة المميزة الأولى k_1 والمتجه المميز x يحقق المعادلة $m . x = k_1 \ x$

```
In[6]:=m.vectors[[1]]= =values[[1]] vectors[[1]]
Out[6]= True
```

لإيجاد المعادلة المميزة للمصفوفة m

```
In[7]:=po=Det[m-k IdentityMatrix[Dimensions[m][[1]]]]
```

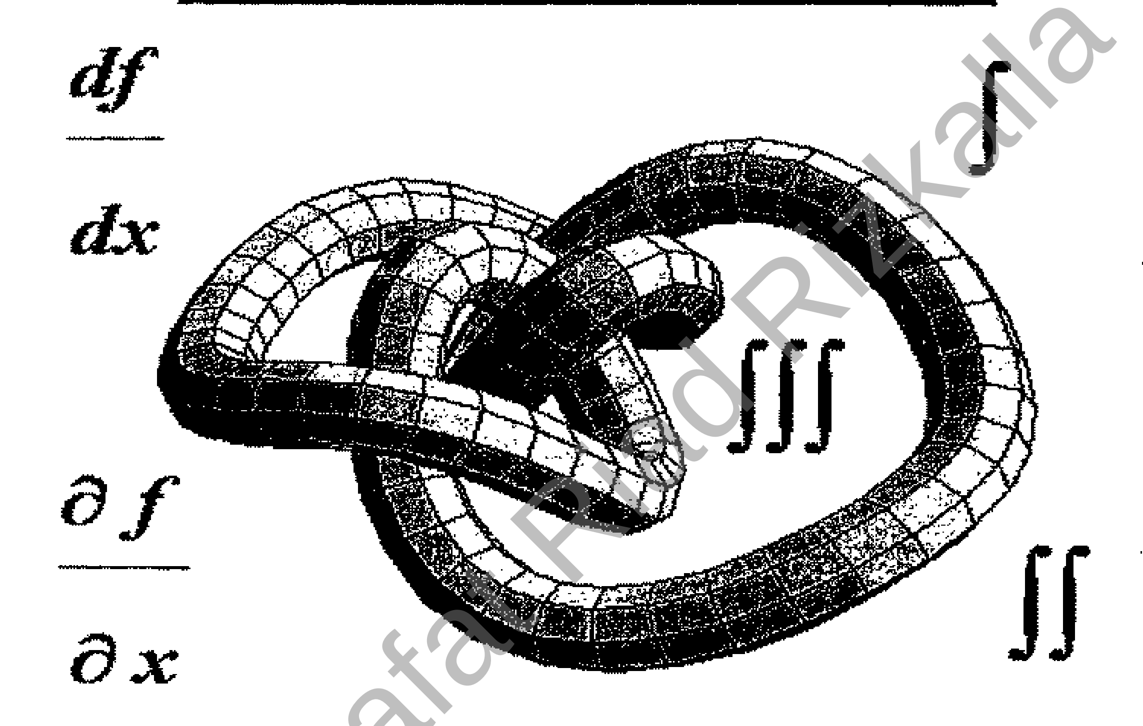
Out[7]= $-4 - 3 k + k^2$

لحل المعادلة المميزة والحصول على القيم المميزة للمصفوفة m

```
In[8]:=Solve[po==0,k]
Out[8]= {{k -> -1}, {k -> 4}}
```

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ـ تعريف الدوال **Defining Functions**

٢ـ النهايات **Limits**

٣ـ التفاضل **Differentiation**

٤ـ التكامل **Integration**

٥ـ المعادلات التفاضليــة **Differential Equations**

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

نعلم أن برنامج ماثيماتيكا يستطيع التعامل مع التعبيرات الرمزية **Symbolic expressions** بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن استخدام ماثيماتيكا فى حساب النهايات **Limits** وحساب التفاضل والتكامل **Calculus** للدوال المختلفة والحصول على النتائج في صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساسية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا **built-in** أو دوال نقوم بتعريفها ، وكذلك يمكن استخدام ماثيماتيكا فى حل المعادلات التفاضلية .

١ . تعريف الدوال Defining Functions

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا فإنه يمكن للمستخدم إضافة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفسه وسوف نستخدم الحروف الصغيرة **lower case - letters** فى كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسماء الدوال الموجودة فى بناء ماثيماتيكا وبين أسماء الدوال الجديدة التى يقوم المستخدم بتعريفها وفقا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة $f(x)=x^2$ في ماثيماتيكا يكتب فى الصورة **f [x_]=x^2** والعلامة _ الموجودة فى الطرف الأيسر بجانب المتغير **x** تسمى الفراغ الخالى **blank space** وهى هامة فى تعريف الدالة حيث النمط **x_ pattern** يرمز الى أي تعبير أو متغير وبذلك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل **Transformation Rule** لجميع التعبيرات التى على الصورة **f[anything]** حيث **anything** يشير الى المتغير **x** أو أي متغير آخر

وعندما يظهر تعبير على الصورة f[anything] فإنه يستبدل بالقيمة anything ^ 2 والتى تمثل ناتج تعريف الدالة f .

تعريف الدالة $f(x)=x^2$

In[1]:=f[x_]=x^2
Out[1]=x^2

عند حساب قيمة الدالة f(x) عند x = 3
فإن الناتج يكون 3^2 ويساوى 9

In[2]:=f[3]
Out[2]= 9

لحساب قيمة الدالة f(x) عند x = a+1

In[3]:=f[a+1]
Out[3]=$(a+1)^2$

عند حساب قيمة f(x) + f(y)

In[4]:=f[x]+f[y]
Out[4]=$x^2 + y^2$

وفى حالة عدم كتابة العلامة _ بالطرف الأيسر فى تعريف الدالة فإن f[x] سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا فى ماثيماتيكا التعريف g[x]=x^3 فإنه عند ظهور التعبير g[x] يتم استبداله بالقيمة x^3 لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير x بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا g[3] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل g[a] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط _ فى تعريف الدالة g .

تعريف $g(x)=x^3$ بدون استخدام النمط _

In[5]:=g[x]=x^3
Out[5]= x^3

عند حساب قيمة g(x) عند x = 3 فإن الناتج
يكون g[3] أي أن g(x) لا تمثل قاعدة تحويل

In[6]:=g[3]
Out[6]= g[3]

لحساب قيمة $g(x)$ عند $x = a$ فإن الناتج	In[7]:=g[a]
يكون g[a] آي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل	Out[7]= g[a]

عند حساب قيمة $g(x) + g(y)$ نلاحظ أن الناتج	In[8]:=g[x]+g[y]
x^3 + g[y] لان $g(x)=x^3$ بينما $g(y)$ ليست معلومة	Out[8]=x^3 + g[y]

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال في ماثيماتيكا :

f[x] = value	تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل
f[x_] = value	تمثل تعريف دالة وهي قاعدة تحويل لاى متغير x

وفي ماثيماتيكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالآتي :

?f	للاستعلام عن تعريف الدالة f
Clear[f]	لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

للاستعلام عن تعريف الدالة f التى سبق	In[9]:=?f
إدخالها في جملة الإدخال In[1]	Out[9]= Global`f
	f[x_] = x^2

لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة	In[10]:=Clear[f]

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة f	In[11]:=?f
نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة	Out[11]= Global`f

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن تعريف دوال في اكثر من متغير ويتم ذلك بتحديد أسم للدالة واستخدام النمط _ لكل متغير في الدالة .

تعريف الدالة r1 في متغيرين

```
In[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2
```

$$Out[12]=x^2 + x\ y + y^2$$

حساب قيمة الدالة r1(x,y) عند x=2 , y=3

```
In[13]:=r1[2,3]
Out[13]=19
```

تعريف الدالة r2 في أربعة متغيرات

```
In[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2
```

$$Out[14]=(x-z)^2 + (y-t)^2$$

وفي برنامج ماثيماتيكا عند تعريف دالة كجملة إحلال lhs = rhs فإنه يوجد مؤثرين للإحلال assignment operators

المؤثر الأول هو علامة التساوى =

والمؤثر الثاني هو علامة :=

والفرق الأساسي بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجملة الإحلال كالآتي :

المؤثر = يستخدم في كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs = rhs إذا كان الطرف الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs

المؤثر := يستخدم في كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs := rhs إذا كان الطرف الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطرف الأيسر lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = في تعريف الدالة r3(x) التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

```
In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
Out[15]= 1+2x+x^2
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r3(x) نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه في صورة مفكوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
        r3[x_] = 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة r3(x) عند x = a + b يتم التعويض عن a + b في المفكوك الموجود بالفعل وهو $1 + 2x + x^2$

```
In[17]:=r3[a+b]
Out[17]=1 + 2 (a + b) + (a + b)^2
```

عند استخدام المؤثر := في تعريف الدالة r4(x) التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه في كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة r4(x)

```
In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r4(x) نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفكوك Expand جاهز للتنفيذ

```
In[19]=?r4
Out[19]=Global`r4
        r4[x_] := Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة r4(x) عند x = a + b يتم التعويض عن a + b في أمر المفكوك Expand[(1+a+b)^2] ثم يتم تنفيذه

```
In[20]:=r4[a+b]
Out[20]=1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2
```

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب مضروب آي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ \dots\ 3x2x1$$

In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]   fa تعريف دالة المضروب تحت اسم

نلاحظ انه في جملة الإحلال الأولى fa[1]=1 استخدمنا المؤثر = لأن الطرف الأيمن قيمته محسوبة بينما في جملة الإحلال الثانية fa[n]:=n fa[n-1] استخدمنا المؤثر := لأن الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها في حساب الطرف الأيمن rhs في كل مرة لذلك فإن المؤثر := ضروري في تعريف هذه الدالة .

In[22]:=fa[4]   لحساب 4!

Out[22]=24

In[23]:=fa[6]   لحساب 6!

Out[23]=720

In[24]:=?fa   للاستعلام عن الدالة fa

```
Out[24]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := n*fa[n - 1]
```

لحذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماثيماتيكا

```
In[25]:=Clear[fa]
```

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ اختفاء التعريف

```
In[26]:=?fa
Out[26]=Global`fa
```

وماثيماتيكـــا عند تنفيذه لهذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطـــى للدالـــة بالصورة fa[6]=6 fa[5] وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] مـــن العلاقة fa[5]=5 fa[4] وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحســـاب fa[4] وهكـــذا حتى يصل الى fa[1] وقيمته معطاة ونلاحظ أن ماثيماتيكا عند حســـابه لقيمـــة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تتذكر القيم التـــى يتـــم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التي يتم إيجادها	f[x_]:=f[x] = rhs

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa بحيث تحفظ القيم التي يتم إيجادها

```
In[27]:=fa[1]=1;fa[n_]:=fa[n]=n fa[n-1]
```

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[28]=?fa
Out[28]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

حساب !4 بواسطة fa[4]

```
In[29]:=fa[4]
Out[29]=24
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

```
In[30]:=?fa
Out[30]=Global`fa
    fa[1] = 1
    fa[2] = 2
    fa[3] = 6
    fa[4] = 24
 fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

حساب !6 بواسطة fa[6]

```
In[31]:=fa[6]
Out[31]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

```
In[32]:=?fa
Out[32]=Global`fa
   fa[1] = 1
   fa[2] = 2
   fa[3] = 6
   fa[4] = 24
   fa[5] = 120
   fa[6] = 720
fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخل التعبير الرياضي عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال x = 3 فهذا يعني أن يقوم ماثيماتيكا باستبدال المتغير x بالقيمة 3 فى أي مكان بالبرنامج يظهر فيه المتغير x إلا إذا تم تغير قيمة x أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى تعبير خاص particular expression ، ويمكن عمل ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام المؤثر /. أو المؤثر //. كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
expr /. x->value	استبدال المتغير x بالقيمة value فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة x->value مرة واحدة فقط
expr /. {x->xval,y->yval}	استبدال المتغير x بالقيمة xval والمتغير y بالقيمة yval فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة x->xval , y->yval مرة واحدة فقط
expr /. rules	تطبيق القاعدة rules فى التعبير expr مرة واحدة فقط حيث القاعدة rules تكون بالصورة lhs->rhs
expr//.rules	تطبيق القاعدة rules على كل أجزاء التعبير expr بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى
Replace[expr,rules]	تطبيق القاعدة rules كوحدة متكاملة على التعبير expr دون تطبيقها على الأجزاء الفرعية من expr

```
In[1]:=1+x^2/.x->3
Out[1]=10
```

استبدال المتغير x بالقيمة 3 في التعبير الرياضي $x^2 + 1$

```
In[2]:=x
Out[2]=x
```

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام المؤثر /. في استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا يؤثر في قيمة المتغير x داخل البرنامج

```
In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2}
Out[3]=9
```

استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير y بالقيمة 2 في التعبير الرياضي $x^2 + 2xy + y^2$

```
In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5
Out[4]=36
```

إحلال قيمة $x^2 + 2x + 1$ في المتغير t ثم حساب قيمة t عندما x->5

```
In[5]:=f[5]/.f[x_]->x
Out[5]=5 f[4]
```

تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]
f[x-1]
ونلاحظ أن المؤثر /. يقوم بتطبيق القاعدة مرة واحدة فقط

```
In[6]:=f[5]//.{f[1]->1,f[x_]->x f[x-1]}
Out[6]=120
```

عنداستخدام المؤثر //. يتم تطبيق القاعدة لحساب f[5] بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائي

```
In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a
Out[7]=2a + a^2
```

عند استخدام المؤثر /. يتم تطبيق القاعدة على كل الأجزاء في التعبير الرياضي

عند حساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ لقيم x التى تقترب من الصفر نلاحظ ما يأتى :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ عندما $x = 0$ فان الناتج يكون كمية غير معينة

```
In[16]:=Sin[x]/x /.x->0
Out[16]=Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.
Infinity::indet:
   Indeterminate expression
```

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن حساب النهايات $\lim_{x \to x_0} f(x)$ وذلك باستخدام الدالة **Limit** كالآتى :

Limit[expr, x->x_0]	حساب نهاية الدالة **expr** عندما تقترب **x** من x_0

في الجدول الآتي نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة ماثيماتيكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3	$\lim_{x \to 2} x^2+3x-7$
In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2	$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3	$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$
In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$	$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$	$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity	$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$
In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$	$\lim_{h \to 0} \frac{x^2\ (x+h)}{2x+h}$
In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity	$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

النهاية بلغة ماثيماتيكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$
In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sec(x)-1}$
In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$
In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{2x^2+5x}$
In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x}{3x^2+2}$
In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1	$\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

٣ ـ التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة فى صورتها الرمزية فى متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلى **Total** أو تفاضل جزئى **Partial** ويتم ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام الأمر **D** كالآتي :

الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى يقوم بها الأمر
D[f,x]	حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة **f** فى متغير واحد أوحساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة **f** فى اكثر من متغير
D[f,{x,n}]	حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة **f** فى متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة **f** فى اكثر من متغير
D[f,x1,x2,...]	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x1}\frac{\partial}{\partial x2}\ldots f$
D[f,x,NonConstants->{v1,v2,...}]	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مع اعتبار أن المتغيرات ...,v1,v2 دوال تعتمد على المتغير x

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x^{n-1}	$\frac{d}{dx}x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x^2 + 5 x^4	$\frac{d}{dx}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x^3	$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x^{n-3}	$\frac{d^3}{dx^3}x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx}\sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec^2[x]	$\frac{d}{dx}\tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x^2 Cos[x] - x^3 Sin[x]	$\frac{d}{dx}x^3\cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x^2 Sec[x^3]+ 12 x^4 Sec[x^3] Tan[x^3]	$\frac{d}{dx}4x^2\sec(x^3)$

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{Sqrt[1-x^2]}$	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)$
In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x^2)$
In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{Cos[t]}{t}-\frac{Sin[t]}{t^2}$	$\frac{d}{dx}\frac{\sin(t)}{t}$
In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2Log[x]}{x}$	$\frac{d}{dx}(Log(x))^2$
In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]	$\frac{d}{dx}f(x)$
In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]	$\frac{d}{dx}f(x^2)$
In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= 2x + 3 (y[x])^2 y'[x]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+(y(x))^3\right)$
In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^3\right)$ مع اعتبار أن y دالة فى x

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]= − x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]= y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]= x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]= 2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]= − 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$

وعند أجراء التفاضل على دالة f في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بـــــالرمز f نلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون كالآتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,0)}$ [x, y]
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(0,1)}$ [x, y]
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(2,0)}$ [x, y]
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,1)}$ [x, y]
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,2)}$ [x, y]
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]

نعلم أن إذا كانت $f = f(x,y)$ فإن التفاضلة الكلية (**Total Differential**) يرمز لها **df** وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر **D** كما رأينا في المثال $D[x^n,x]$ يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة x^n بالنسبة الى **x** مع اعتبار أن **n** ثابت لا يعتمد على **x** وفي ماثيماتيكا يوجد أمر آخر يرمز له **Dt** ويقوم بحساب المشتقة الكلية **Total Derivative** وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات في الاعتبار .

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر في ماثيماتيكا
حساب التفاضلة الكلية **df**	Dt[f]
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$	Dt[f,x]
حساب المشتقة الكلية من رتبة **n** أي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$	Dt[f,{x,n}]
حساب المشتقةالكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبـــــار أن المتغيرات **v1,v2,...** ثوابت لا تعتمد على المتغير **x** أي أن **dv1=0 , dv2=0 , ...**	Dt[f,x,Constants->{v1,v2,...}]

فى الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة ماثيماتيكا	التفاضلة بلغة الرياضيات
In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]	$df = f`(x)\, dx$
In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n\, x^{n-1}$ Dt[x]+ x^n Dt[n] Log[x]	$dx^n = nx^{n-1}\, dx + x^n \mathrm{Log}[x]\, dn$
In[35]:=Dt[x^n,Constants->{n}] Out[35]= $n\, x^{n-1}$ Dt[x,Constants- > {n}]	$dx^n = nx^{n-1}\, dx$ حيث n ثابت
In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] $f^{(0,1)}$ [x, y] + Dt[x] $f^{(1,0)}$ [x, y]	$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
In[37]:= Dt[x^2Sin[y]+y^2,y] Out[37]= $2y + x^2$ Cos[y]+2x Dt[x,y] Sin[y]	$\frac{d}{dy}\left(x^2 \sin(y) + y^2\right) = 2y + x^2 \cos(y) + 2x \sin(y) \frac{dx}{dy}$
In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= 2 x + 2 y Dt[y, x] + 2 z Dt[z, x]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx}$
In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x,Constants>{z}] Out[39]= 2 x + 2 y Dt[y, x, Constants -> {z}]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت

٤ . التكامل Integration

برنامج ماثيماتيكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تحتـــوى على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، وناتج التكامل يكون فى صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة (الثنائية والثلاثية ... الخ)وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمـــر Integrate كالآتي:

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا
حساب التكامل $\int f\ dx$	Integrate[f,x]
حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f\ dx$	Integrate[f,{x,xo,x1}]
حساب التكامل الثنائى $\int_{xo}^{x1}\int_{yo}^{y1} f\ dy\ dx$	Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1}]
حساب التكامل $\int_{xo}^{x1}\int_{yo}^{y1}\int_{...}^{...} f\ ...\ dy\ dx$	Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1},...]

فى الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n\, dx$
In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\text{Log}[x]}$	$\int x^n\, dn$
In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]	$\int \frac{1}{x}\, dx$
In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]	$\int \text{Log}(x)\, dx$
In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= $E^x\ (-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3)$	$\int x^3\, e^x\, dx$
In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]	$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$
In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[8]:=Integrate[1/Sqrt[9-x^2],x] Out[8]=ArcSin[$\frac{x}{3}$]	$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
In[9]:=Integrate[1/Sqrt[1+x^2],x] Out[9]=ArcSinh[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
In[10]:=Integrate[x^2 Sin[x],x] Out[10]=2 Cos[x] - x^2 Cos[x] + 2 x Sin[x]	$\int x^2 \sin(x)\,dx$
In[11]:=Integrate[y x^2,x] Out[11]= $\frac{y\,x^3}{3}$	$\int yx^2\,dx$
In[12]:=Integrate[x^2,{x,1,4}] Out[12]= 21	$\int_1^4 x^2\,dx$
In[13]:= Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,3x}] Out[13]= 3 a^4	$\int_0^a \int_0^{3x} \left(x^2+y^2\right)dy\,dx$
In[14]:= Integrate[xy+z,{z,0,1},{y,1,5z} ,{x,y,3y+5z}] Out[14]= 286	$\int_0^1 \int_1^{5z} \int_y^{3y+5z} \left(x^2+y^2\right)dy\,dx$
In[15]:=Integrate[xy+zw^2,{w,0,2}, {z,1,w},{y,0,z+w},{x,w,y^2+2w}] Out[15]= $\frac{37916}{315}$	$\int_0^2 \int_1^w \int_0^{z+w} \int_w^{y^2+2w} \left(xy+zw^2\right)dx\,dy\,dz\,dw$

٥. المعادلات التفاضليـة Differential Equations

المعادلة التفاضليـة هي معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والدالة التابعة ومشـتقات هذه الدالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضليـة تحتوى على متغير مسـتقل واحـد فإنها تسـمى معادلة تفاضليـة عاديـة (Ordinary Differential Equation (ODE وإذا كانت المعادلة تحتوى على متغيرين مستقلين أو اكثر فإنها تسمي معادلـة تفاضلـة جزئيـة (Partial Differential Equation PDE) .

ورتبة Order المعادلة التفاضلية هى رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة Degree المعادلة التفاضلية هى الأس المرفوع أليه المشتقة ذات اكبر رتبة . وفى الجدول الآتي نضع بعـض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

معادلات تفاضلية عادية (ODE)	الرتبة Order	الدرجة Degree
$\frac{dy}{dx} = x + 5$	الرتبة الأولى	الدرجة الأولى
$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x$	الرتبة الثانية	الدرجة الأولى
$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$	الرتبة الأولى	الدرجة الثانية
$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$	الرتبة الثانية	الدرجة الثانية
$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$	الرتبة الثالثة	الدرجة الأولى

معادلات تفاضلية جزئية (PDE)	الرتبة Order	الدرجة Degree
$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = f$	الرتبة الأولى	الدرجة الأولى
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$	الرتبة الثانية	الدرجة الأولى

يقال للمعادلة التفاضلية (عادية ODE أو جزئية PDE) أنها معادلة تفاضلية خطية **Linear Differential Equation** إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوى على حوا صل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem** إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر **Dsolve** كالآتي :

حل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع y[x] بدلالة المتغير المستقل x

DSolve[eqn, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x] Out[1]={{y[x] -> E^{x} C[1]}}	$\frac{dy}{dx}=y$
In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x] Out[2]={{y[x] -> C[1] + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx}=\cos(x)$
In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x] Out[3]= $\left\{\left\{y[x]->\frac{x}{2}+\frac{C[1]}{x}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=1$
In[4]:=DSolve[{y''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x] Out[4]= {{y[x] -> -x + x^{2} + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}	$y''+y=x^2-x+2$
In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x] Out[5]= {{y[x] -> x (-2 E^{x} + E^{x} x + C[1] + x C[2])}}	$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^4e^x$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} + 3 \frac{d^2 y}{d x^2} - 4y = x e^{-2x}$$	المعادلــة التفاضلية بلغـــة الرياضيات
In[6]:=Dsolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] Out[6]= $\left\{\left\{ y[x] -> -\frac{1}{18}\left(x^2 + x^3\right)e^{-2x} + \left(C[1] + x C[2]\right)e^{-2x} + e^x C[3] \right\}\right\}$	المعادلــة التفاضلية بلغـــة ماثيماتيكا

$$\frac{d^4 y}{d x^4} + 2\frac{d^3 y}{d x^3} - 3 \frac{d^2 y}{d x^2} = 3e^{2x} + 4\sin(x)$$	المعادلــة التفاضلية بلغـــة الرياضيات
In[7]:=DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] Out[7]= $\left\{\left\{ y[x] -> \frac{C[1]}{e^{3x}} + C[2] + x C[3] + e^x C[4] + \frac{1}{180}\left(27e^{2x} + 72 Cos[x] + 144 Sin[x]\right) \right\}\right\}$	المعادلــة التفاضلية بلغـــة ماثيماتيكا

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - 9\right)y = 0$$ Bessel Equation معادلة بيســـــل	المعادلــة التفاضلية بلغـــة الرياضيات
In[8]:=DSolve[x^2y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] Out[8]={{y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]}}	المعادلــة التفاضلية بلغـــة ماثيماتيكا

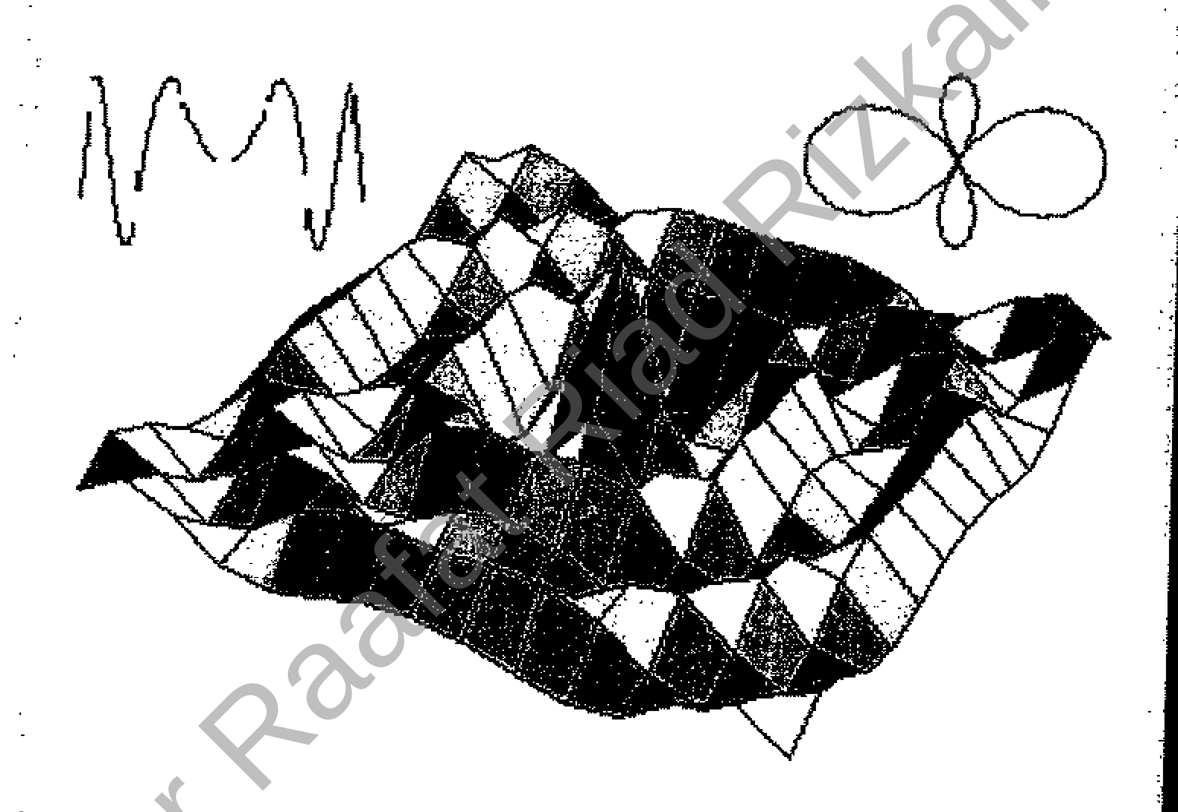
لحل المعادلة التفاضلية eqn والتى تحقق الشرط الابتدائى y[xo]=a

DSolve[{eqn,y[xo]==a}, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x] Out[9]={{y[x] ->3 E ^{x} }}	$\frac{dy}{dx}=y$, y[0]=3
In[10]:= DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x] Out[10]={{y[x] -> 2 + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx}=\cos(x)$, y[0]=2
In[11]:= Dsolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x], y[1]=-2},y[x],x] Out[11]= $\left\{\left\{y[x]->-Sqrt[\frac{18}{5x^4}+\frac{2x}{5}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=y$, y[1]=−2
In[12]:= Dsolve[{y''[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] + Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x] Out[12]={{y[x] -> E ^{x} - E ^{x} x + E ^{2x} x}}	$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x+e^{2x}$ y[0]=1 , y'[0]=1

الباب الخامس

ماثيماتيكا ورسم الدوال



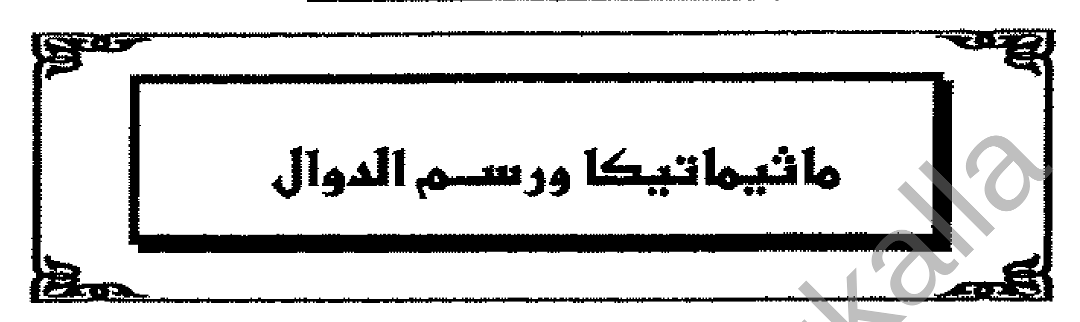
فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. رسم الدوال في المستوى Two-Dimensional Plotting

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

٣. رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

الباب الخامس



ماثيماتيكا ورسم الدوال

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أداء دور كبير في عمليات رسم الدوال في المستوى والفراغ وكذلك الدوال في الصورة البارامترية ولتنفيذ عملية رسم الدوال في ماثيماتيكا نحتاج الى تحديد ثلاث أشياء أساسية هي :

- تعريف الدالة المطلوب رسمها
- تعريف المتغير المستقل **Independent variable**
- تعريف نطاق المتغير المستقل **Domain**

ويحتوى ماثيماتيكا على العديد من الاختيارات **Options** التى تتحكم في شكل ومواصفات الرسم **graph** وبعض هذه الاختيارات يكون فعال **Default** بمعنى أن ماثيماتيكا يقوم بتنفيذها أوتوماتيك **Automatic** عند بداية التشغيل فمثلا الاختيارات

- تحديد مقياس رسم مناسب **scale**
- تحديد عدد النقط التى يتم حساب قيم الدالة عندها
- اختيار المدى **Range** للمتغير التابع **Dependent variable**
- تحديد وترقيم محاور الإحداثيات

تعتبر من الاختيارات الفعالة في ماثيماتيكا وكل اختيار له اسم محدد ويمكن للمستخدم تغيير الاختيارات الفعالة في ماثيماتيكا وإضافة آي اختيارات أخرى حسب طبيعة الرسم المطلوب .

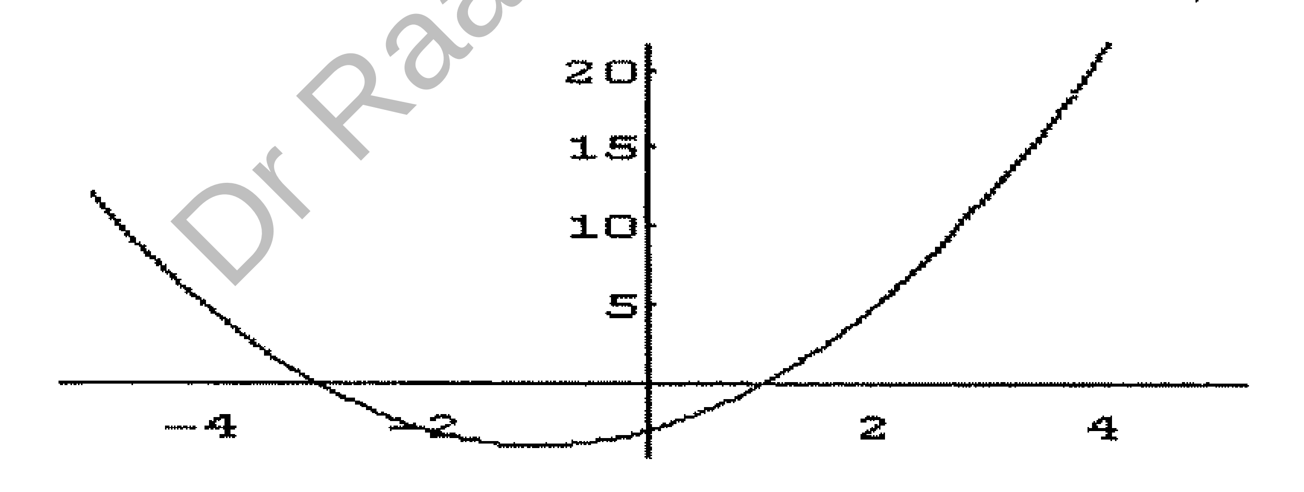
١ . رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting

الدالة ذات المتغير الواحد يرمز لها $y = f(x)$ حيث x يسمى بالمتغير المستقل ، y يسمى بالمتغير التابع ونطاق الدالة يقع على محور x والمدى يقع على محور y وترسم الدالة فى المستوى ويمثلها مجموعة النقط (x,y) فى المستوى التى تحقق $y = f(x)$ ، ومن أهم أوامر رسم الدوال فى ماثيماتيكا هو الأمر Plot وله الصيغة العامة الآتية :

Plot[f, {x, xmin, xmax}]
رسم الدالة f كدالة فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]
رسم مجموعة دوال ... , f1 , f2 فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax

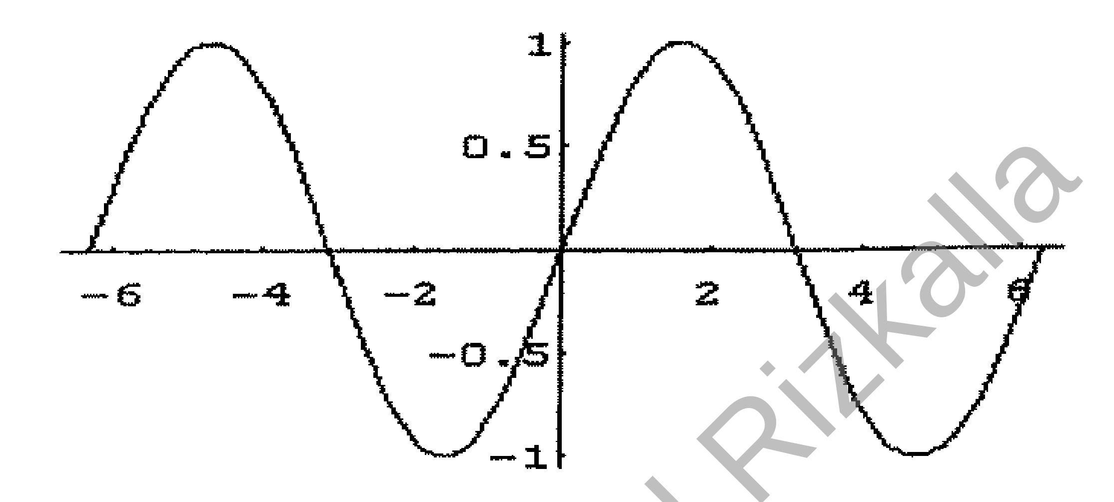
والناتج من تنفيذ أمر Plot يكون صورة مرسومة " Graphics Object " للدالة أو لمجموعة الدوال المعطاة وفقا للاختيارات الفعالة .

In[1]:=Plot[x^2+2x-3,{x,-5,5}] رسم الدالة $x^2 +2x-3$ فى الفترة [-5,5]



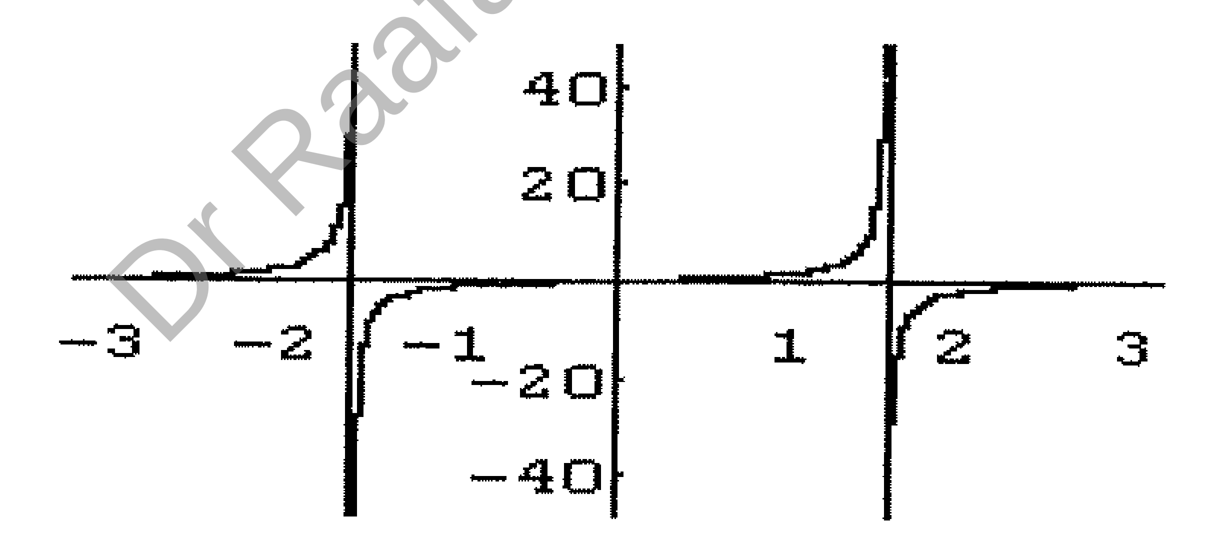
Out[1]=-Graphics-

رسم الدالة sin x في الفترة [-2π ,2 π] In[2]:= Plot[Sin[x],{x,-2Pi,2Pi}]

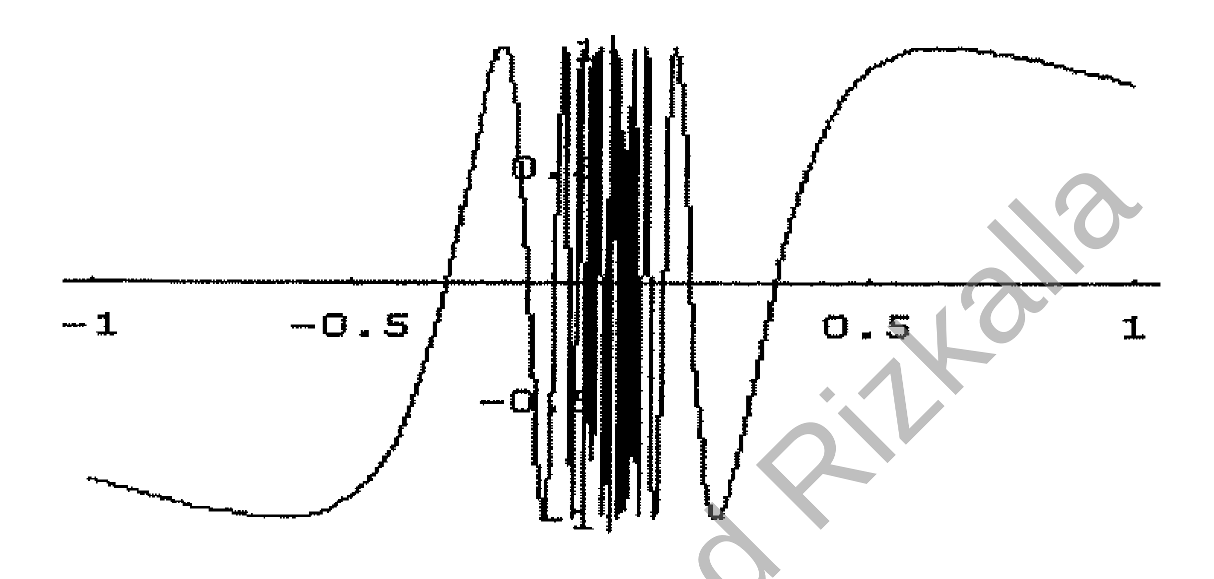


والأمر Plot في ماثيماتيكا قادر على رسم دوال لها نقاط شاذة في نطاق التعريف حيث يقوم ماثيماتيكا باختيار مقياس رسم مناسب .

رسم الدالة Tan(x) في الفترة [-3,3] In[3]: =Plot[Tan[x],{x,-3,3}

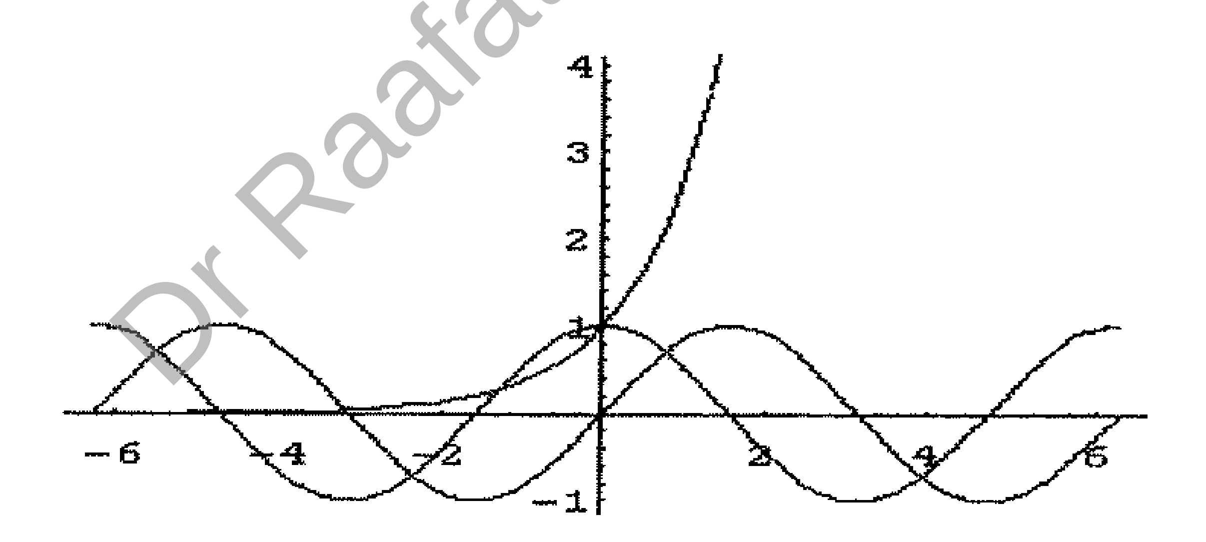


In[4]:=Plot[Sin[1/x],{x,-1,1}]   الدالة sin(1/x) لها نقطة شـاذة عند x=0



In[5]:=Plot[{Sin[x],Cos[x],Exp[x]},{x,-2Pi,2Pi}]

لرسم مجموعة من الدوال على نفس النطاق



ونلاحظ في الأمثلة السابقة انه تم رسم الدوال بدون إضافة أي اختيارات Options الى أمر الرسم Plot بمعنى أن الرسوم تم تنفيذها بالاختيارات الفعالة default الموجودة داخل ماثيماتيكا ، ولكن كان من الممكن إضافة أي اختيارات للرسم حيث أن كل اختيار له اسم Name ويأخذ قيمة Value ويتم وضع الاختيار Option داخل أمر الرسم Plot في صورة قاعدة

Name -> Value

ويمكن وضع اكثر من اختيار داخل أمر الرسم Plot بحيث يفصل كل منها علامة الفاصلة "," ومن القيم Value المستخدمة في هذه الاختيارات

Automatic	وتعنى أن يتم الاختيار اتوماتيك وفقا لأسلوب ماثيماتيكا
All	وتعنى عمل كل ما هو متاح من ماثيماتيكا في هذا الاختيار
None	وتعنى عدم استخدام ما هو متاح من ماثيماتيكا في هذا الاختيار
True	وتعنى تنفيذ الاختيار
False	وتعنى عدم تنفيذ الاختيار

وفي حالة عدم تحديد قيمة خاصة لاختيار ما للأمر Plot فإن ماثيماتيكا يقوم أوتوماتيك باستخدام القيمة الفعالة لهذا الاختيار وبصفة عامة يمكن الاستعلام عن القيم الفعالة للاختيارات المتاحة لدالة function باستخدام الأمر Option في الصورة

Option[function]

للتعرف على القيم الفعالة للاختيارات الخاصة بالأمر Plot **In[6]:=Option[Plot]**

Out[6]={ AspectRatio -> GoldenRatio^(-1) , Axes -> Automatic , AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10. PlotDivision>20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction }

وإذا تم تحديد قيم خاصة لاختيارات دالة **function** وأردنا استخدام هذه القيم الجديدة اكثر من مرة بعد ذلك فإنه يمكن جعلها قيم فعالة باستخدام الأمر **SetOptions** في الصورة

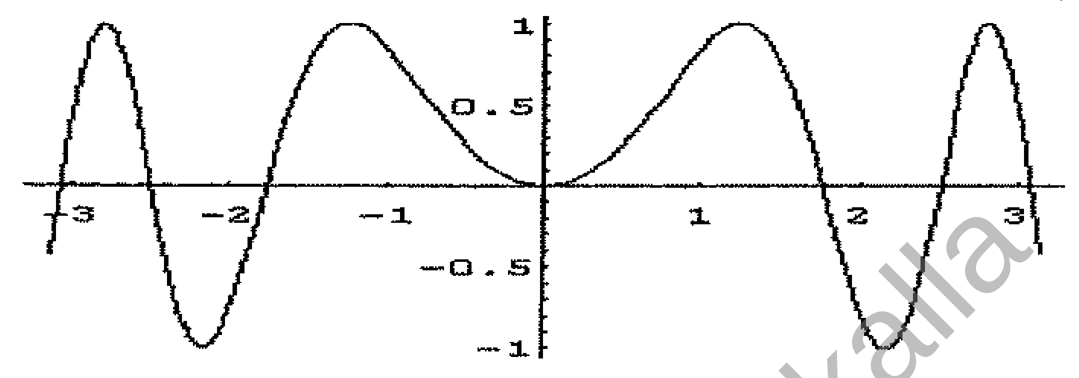
SetOptions[function,Name1->value1,Name2->value2,...]

وسوف نتعرف الآن على بعض الاختيارات **Options** المستخدمة مع الأمر **Plot** والقيم الفعالة لكل منها وقيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم وكيفية تغيرها .

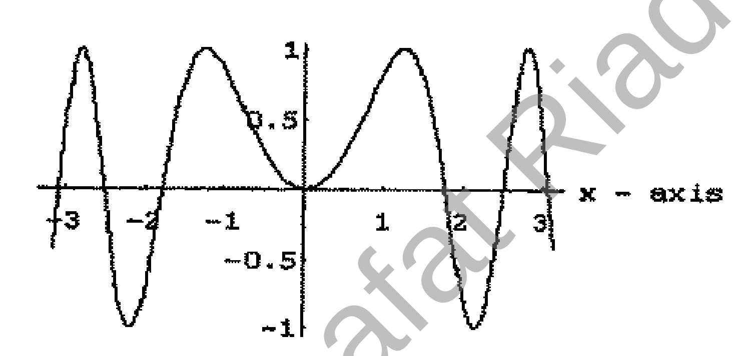
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيـــــم أخرى للاختيار Another values
PlotRange -> Automatic	تحديـــــد مـــــدى الإحداثيات التى يتم التعامل معهـــا فـــى الرسم	PlotRange -> {ymin,ymax} PlotRange>{{xmin,xmax},{ymin,ymax}} PlotRange -> All
PlotLabel -> None	كتابة عنوان علـــى الرسم	PlotLabel -> "expr" حيث "expr" تعنى أي عنوان يتم كتابته على الرسم
Frame -> False	إمكانية عمل إطار حول الرسم	عمل إطار حول الرسم Frame -> True
FrameLabel -> None	إمكانية كتابة عنوان على الإطار حـــول الرسم	FrameLabel ->"graph(1)" كتابة العنوان graph(1) على الإطـــار حول الرسم
AxesOrigin -> Automatic	تحديد نقطة الأصل	AxesOrigin -> {x0,y0} تحديد النقطة (x0,y0) كنقطة اصل
Axes -> Automatic	رســـم محـــاور الإحداثيات	Axes -> None عدم رسم محاور للإحداثيات
AxesLabel -> None	كتابة عناوين علـــى المحاور	AxesLabel -> {"y-axes"} كتابة العنوان y-axes على محور y فقط AxesLabel -> { "x-label", "y-label"} كتابة العنوان x-label على محور x والعنوان y-label غلى محور y
GradLines -> None	لعمل رسم شـــبكى يحتوى بداخله علـــى رسم الدالة	GradLines -> Automatic

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيـــــم أخرى للاختيار Another values
AspectRatio -> $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ حيث GoldenRatio ≅ 1.61803	يمثل نسبة واجهـــة الرسم وهي النســبة بين ارتفاع وعــرض الرسم	AspectRatio-> Automatic AspectRatio->n اختيار عدد n يمثل النسبة بـين ارتفـاع وعرض منطقة الرسم
Ticks -> Automatic	ترقيـــم محـــاور الإحداثيات	Ticks -> None عدم ترقيم المحاور Ticks -> {Automatic,None} ترقيم محور x فقط Ticks -> { None,Automatic} ترقيم محور y فقط
Plot Points -> 25	اختيار عدد n يمثل عدد النقط فى العينة والتى يتم حســاب قيم الدالة عندها	Plot Points -> n
MaxBend -> 10	اختيارعدد n يمثـل اكبر زاوية التواء بين القطع المتعاقبة علـى المنحنى	MaxBend -> n
PlotDivison -> 20	اكبر معامل يتم بــه تقسيم الفترةالمعطـاة الى فترات جزئية	PlotDivison -> n اختيار عدد n يمثل اكبر تقســيم ممكن من الفترات الجزئية للفترة المعطاة
Background -> Automatic	اختيار لون خلفيـــة الرسم	Background -> GrayLevel[x] جعل الخلفية باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0,1
DisplayFunction-> $DisplayFunction	إظهار رسم الدالة	DisplayFunction-> Identity منع ظهور رسم الدالة

In[7]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}]   رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$

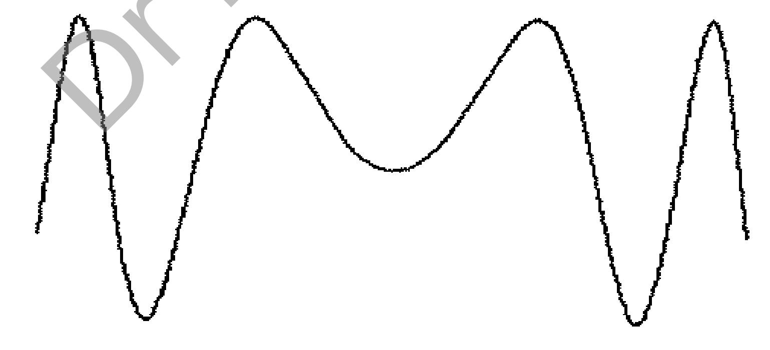


In[8]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesLabel->{"x - axis","y - axis"}]



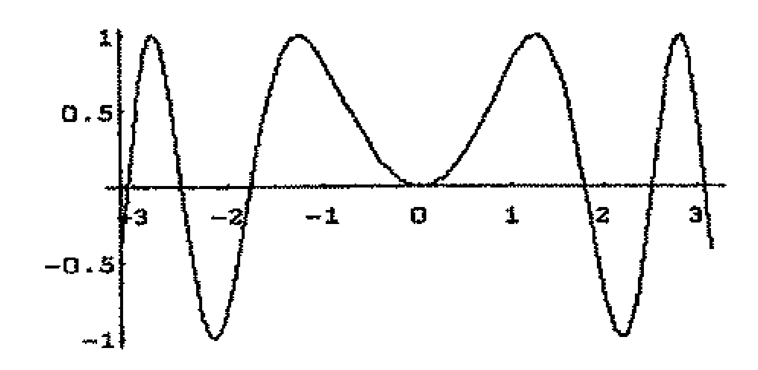
ولوضع العنوان " x - axis " على المحور الأفقي والعنـــــوان " y - axis" على المحور الرأسي

In[9]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Axes->None]



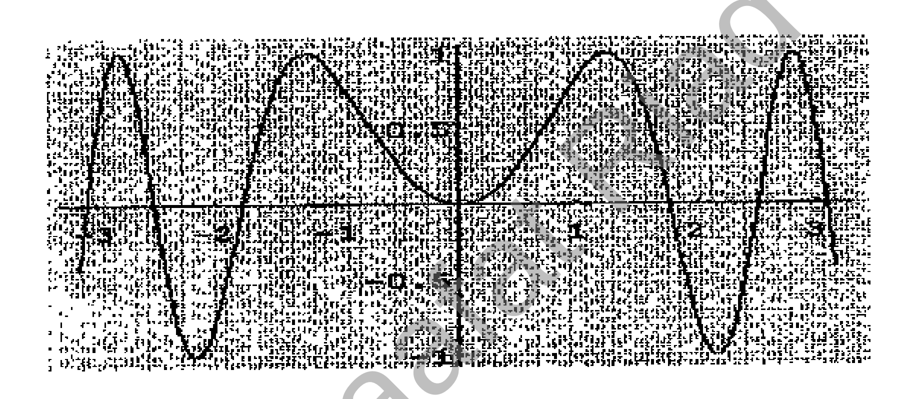
رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وحذف المحاور من الرسم

In[10]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesOrigin->{-Pi,0}]



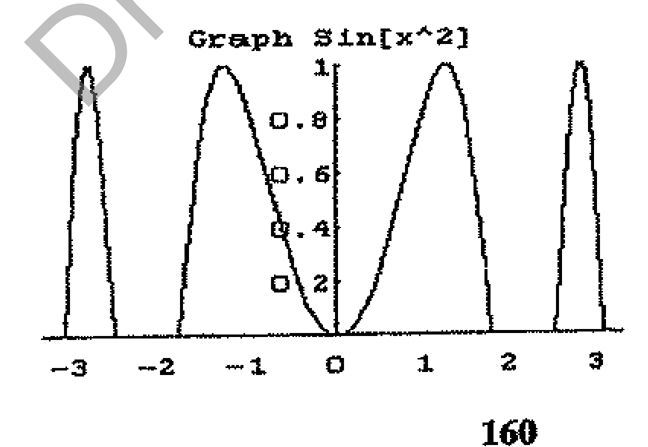
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وجعل نقطة الأصل هي النقطة $(-\pi,0)$

In[11]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Background->GrayLevel[0.5]]



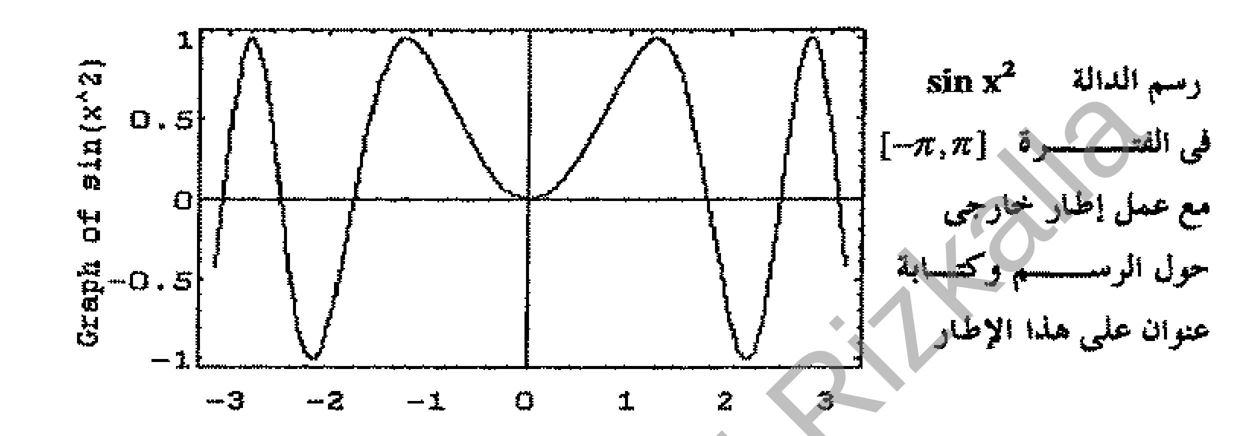
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ مع جعل خلفية الرسم باللون الرمادى

In[12]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},PlotRange->{0,1}, PlotLabel->"Graph Sin[x^2]"]



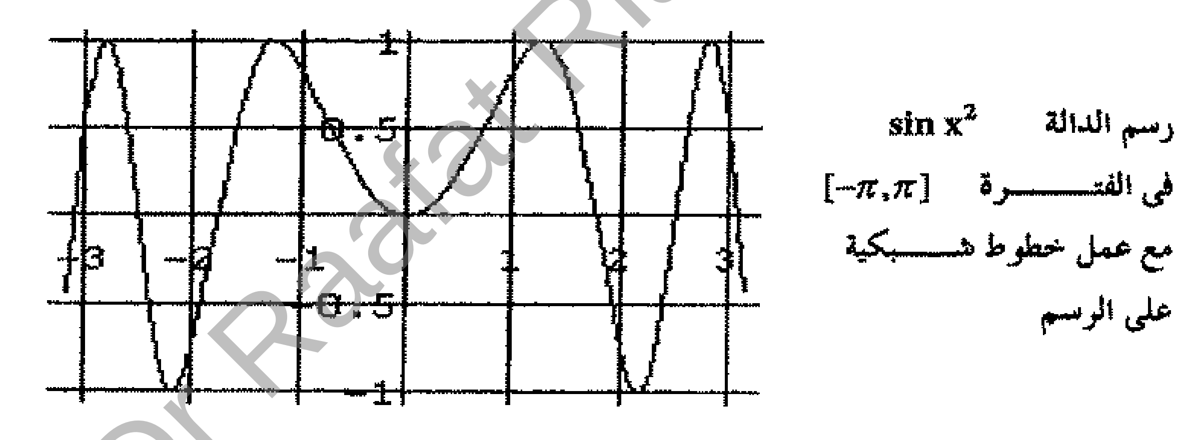
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وفي المدى من 0 الى 1 وكتابة عنوان على الرسم

**In[13]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Frame->True,
FrameLabel->"Graph of sin(x^2)"]**



رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ مع عمل إطار خارجي حول الرسم وكتابة عنوان على هذا الإطار

In[14]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},GridLines->Automatic]



رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ مع عمل خطوط شبكية على الرسم

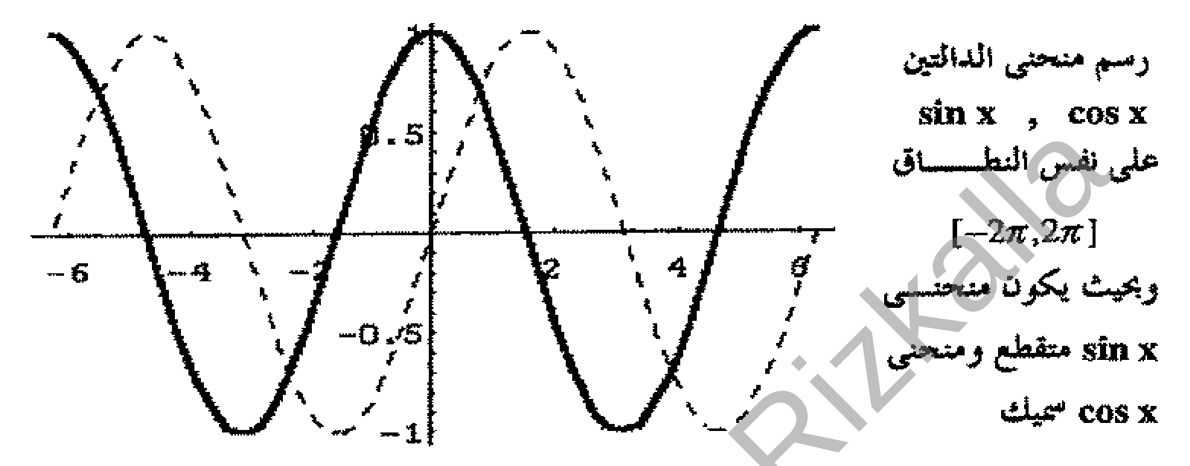
وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الرسوم الأولية في توضيح النقط والخطوط والمنحنيات بأساليب مختلفة **different styles** ويتم ذلك بواسطة الاختيار **PlotStyle** مع الأمر **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **PlotStyle** كالآتي :

PlotStyle->style تحديد الأسلوب style لرسم جميع المنحنيات للدوال الموجودة بالأمر Plot
PlotStyle->{{style1},{style2},...} تحديد الأساليب ... ,style1, style2 للاستخدام بصورة دورية مع منحنيات الدوال الموجودة في الأمر Plot فمنحنى الدالة الأولى يرسم بالأسلوب style1 ومنحنى الدالة الثانية يرسم بالأسلوب style2 ... الخ

ونعرض الآن بعض الأساليب styles الموجودة في ماثيماتيكا ووظيفة كلا منها .

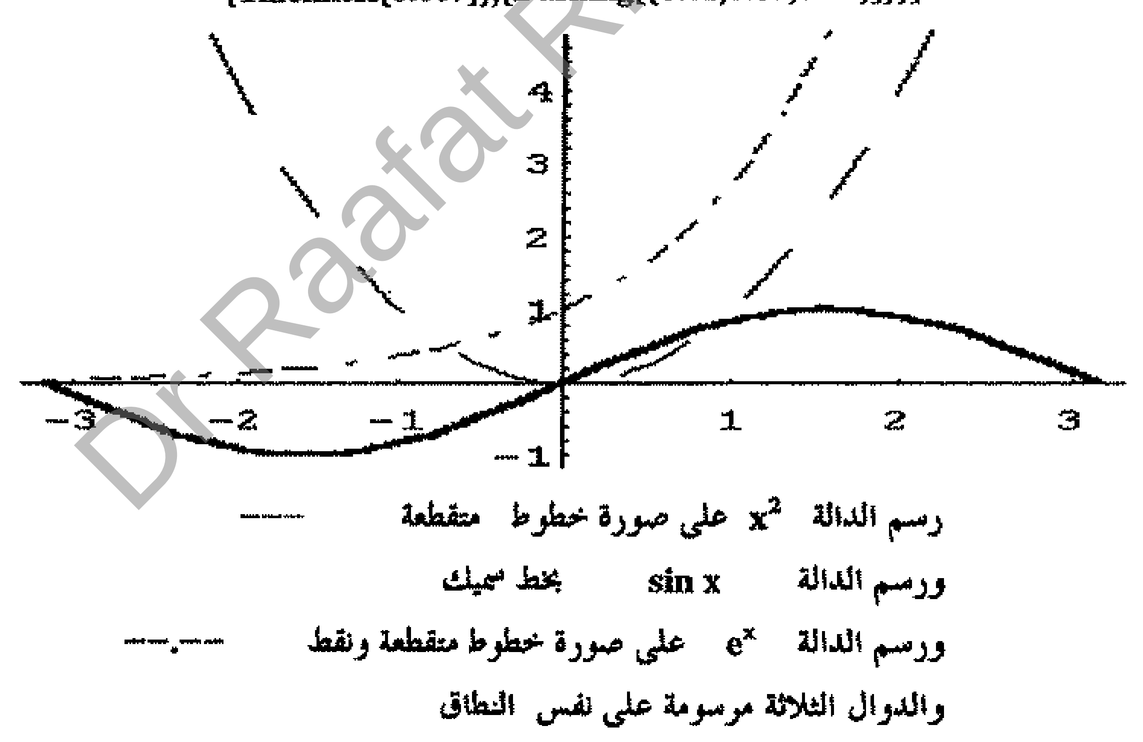
الأسلوب style	الوظيفة
Thickness[x]	رسم المنحنى بحيث يكون سمك الخط المستخدم يساوى x حيث x تمثل كسر من العرض الكلي للرسم فمثلا لجعل الخط كثيف Thickness[0.05]
Dashing[{d}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d حيث d تمثل كسر من العرض الكلي للرسم ، فمثلا لرسم المنحنى متقطع بالصورة —— يكتب Dashing[{0.25}]
Dashing[{d1,d2,d3,...}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها ...,d1,d2 وبصورة دورية حيث كلا من di يمثل كسر من العرض الكلي للرسم
GrayLevel[x]	رسم المنحنى باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0 , 1 حيث لون اسود black GrayLevel[0] لون ابيض white GrayLevel[1] لون رمادى gray GrayLevel[0.5]
RGBColor[r,g,b]	رسم المنحنى ملون حيث r,g,b تمثل الألوان الأحمر red والأخضر green والأزرق blue على الترتيب وكل منهما يأخذ قيم بين 0 , 1 وفقا لدرجة اللون المطلوب

**In[15]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-2Pi,2Pi},
PlotStyle->{Dashing[{0.02}],Thickness[0.007]}]**



رسم منحنى الدالتين
sin x , cos x
على نفس النطـــــاق
$[-2\pi, 2\pi]$
وبحيث يكون منحنـــى
sin x متقطع ومنحنى
cos x سميك

**In[16]:=Plot[{x^2,Sin[x],Exp[x]},{x,-Pi,Pi},PlotStyle->{{Dashing[{0.08}]},
{Thickness[0.007]},{Dashing[{0.01,0.03,0.03}]}}]**



رسم الدالة x^2 على صورة خطوط متقطعة ------

ورسم الدالة **sin x** بخط سميك

ورسم الدالة e^x على صورة خطوط متقطعة ونقط ---.---

والدوال الثلاثة مرسومة على نفس النطاق

ويمكن استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل محاور الإحداثيات في الرسم الناتج ويتم ذلك باستخدام الاختيار AxesStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار AxesStyle كالآتي :

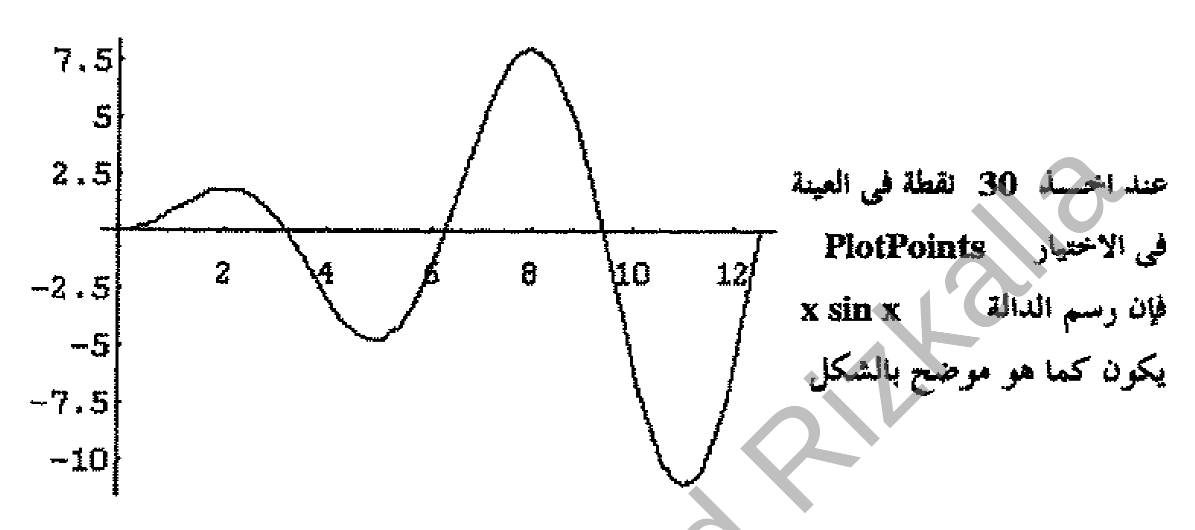
AxesStyle ->style تحديد الأسلوب **style** في رسم محاور الإحداثيات
AxesStyle ->{{stylex},{styley}} تحديد الأسلوب **stylex** في رسم محور **x** والأسلوب **styley** في رسم محور **y**

ويمكن أيضا استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل الإطار المرسوم حول الرسم ويتم ذلك باستخدام الاختيار FrameStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار FrameStyle كالآتي :

FrameStyle ->style تحديد الأسلوب **style** في رسم الأوجه الأربعة للإطار
FrameStyle ->{{xpstyle},{ypstyle},{ xnstyle},{ynstyle}} تحديد أربعة أساليب لرسم الأوجه الأربعة للإطار مبتدأ من الوجه الأفقي السفلي ويرسم بالأسلوب **xpstylex** والأوجه الباقية ترسم بالأساليب الباقية حسب دوران عقارب الساعة

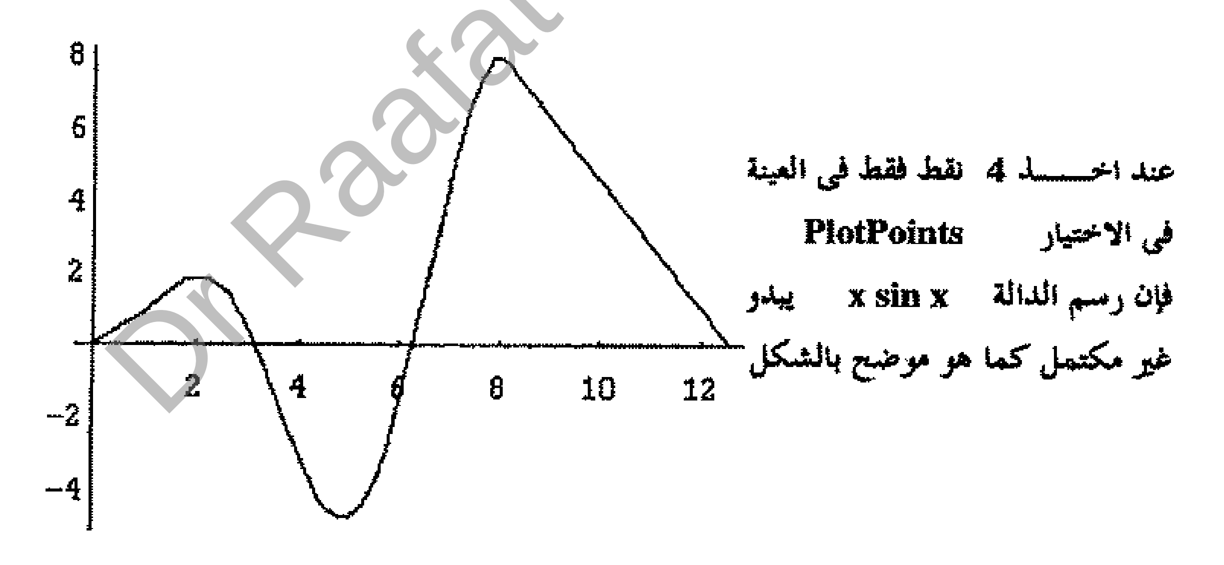
وفي ماثيماتيكا يقوم الأمر Plot في البداية بحساب قيم الدالة عند عينة من النقط المتساوية البعد ويتم تحديد عدد النقط في العينة بواسطة الاختيار PlotPoints وقيمته الابتدائية الفعالة هي 25 ثم يقوم الأمر Plot بعد ذلك بأخذ عينات إضافية من النقط لعمل منحنى بحيث تكون زاوية الالتواء bend بين الأجزاء المتعاقبة على المنحنى اقل من القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار MaxBend وهي 10 ويتم تقسيم الفترة المعطاة الى فترات جزئية عددها (على الأكثر) يساوى القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار PlotDivision وهي 20 .
ويجب مراعاتانه إذا استخدمنا عدد صغير من النقط في العينة فإن رسم المنحنى قد يبدو غير مكتمل ويمكن التحقق من ذلك عن طريق زيادة عدد نقط العينة في الاختيار PlotPoints .

In[17]:= p1=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->30]



عند اختيار 30 نقطة فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x
يكون كما هو موضح بالشكل

In[18]:= p2=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->4]



عند اختيار 4 نقط فقط فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x يبدو
غير مكتمل كما هو موضح بالشكل

ويمكن التعرف على المعلومات التى يقوم ماثيماتيكا بحسابها عند تنفيذ أمر Plot لرسم الدالـــة وذلك باستخدام الأمر InputForm فى الصورة

للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثيماتيكا على expr	InputForm [expr]

فمثلا للتعرف على البيانات التى ينفذها ماثيماتيكا على الرسم p2 فى جملة الإدخال الســـابقة يرسل الأمر

InputForm [p2]

وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بحفظ المعلومات الخاصة بكل رسم يتم تنفيذه بحيث يمكن إعادة الرسم فى آي وقت بعد ذلك مع إمكانية تغيير بعض الاختيارات المستخدمة وذلك للنظـــر الى الرســم بطرق مختلفة كما يمكن عرض اكثر من رسم معا ويتم ذلك باستخدام الأمر Show كالآتي :

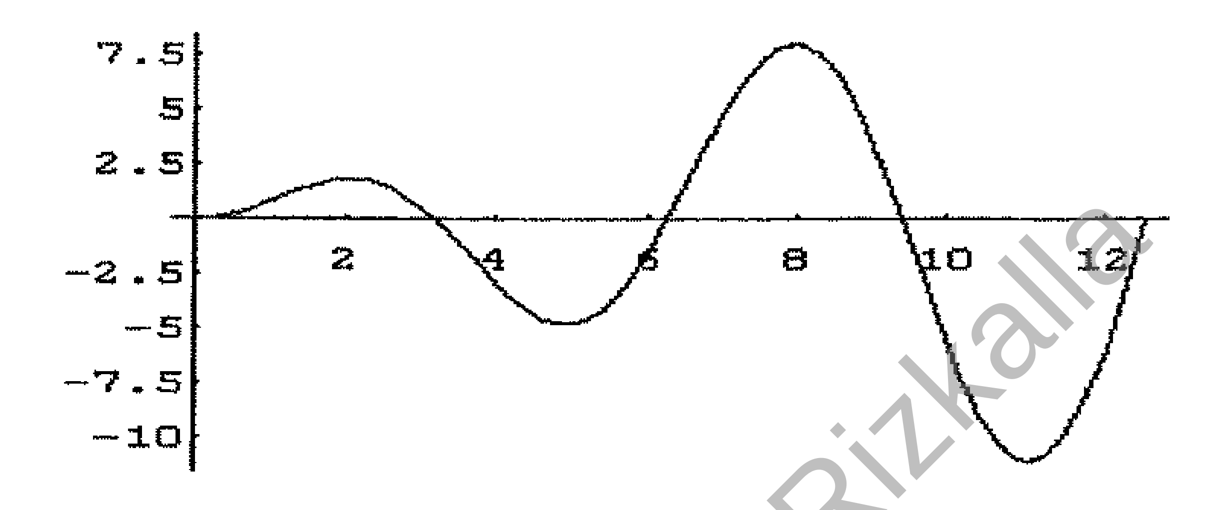
Show[p1]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot
Show[p1,option->value]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot مع تنفيذ الاختيار Option -> value
Show[plot1,plot2,...]	إعادة عرض رسم المنحنيات p1,p2,... الناتجة من Plot معا فى رسم واحد

وفى أمر إعادة الرسم Show يمكن استخدام اختيارات الأمر Plot ما عدا الاختيارات التى تغير من طبيعة وعدد النقط فى العينة المستخدمة لرسم الدالة مثل الاختيارات

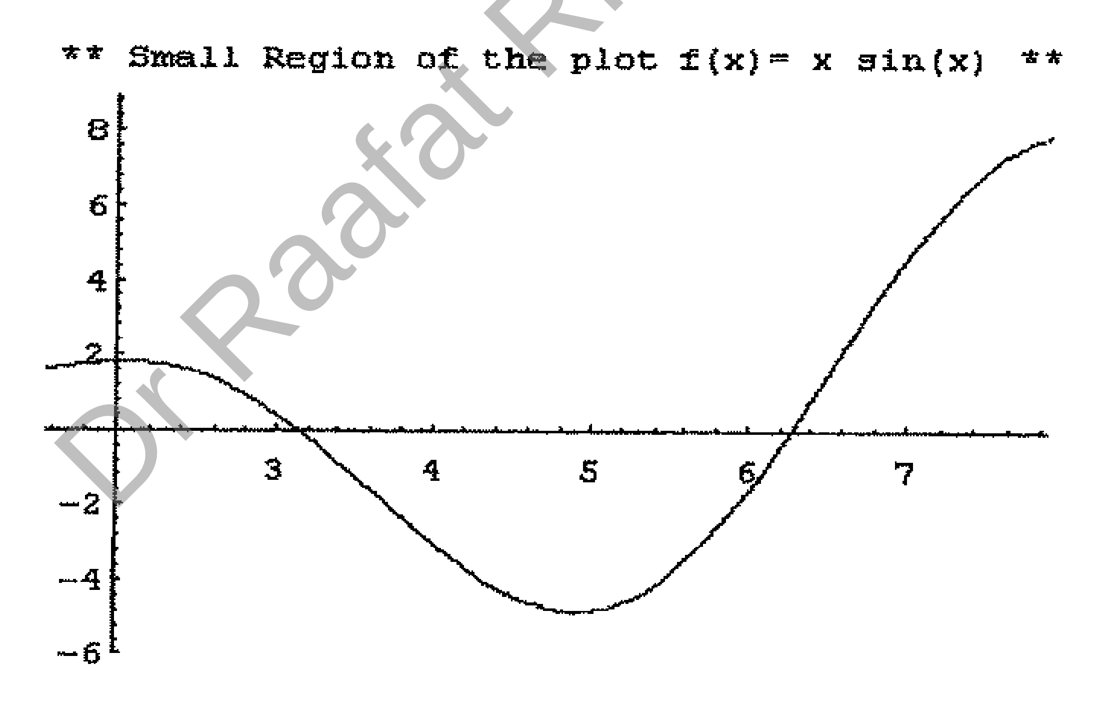
PlotStyle , PlotPoints , MaxBand , PlotDivision

والأمثلة الآتية توضح ذلك .

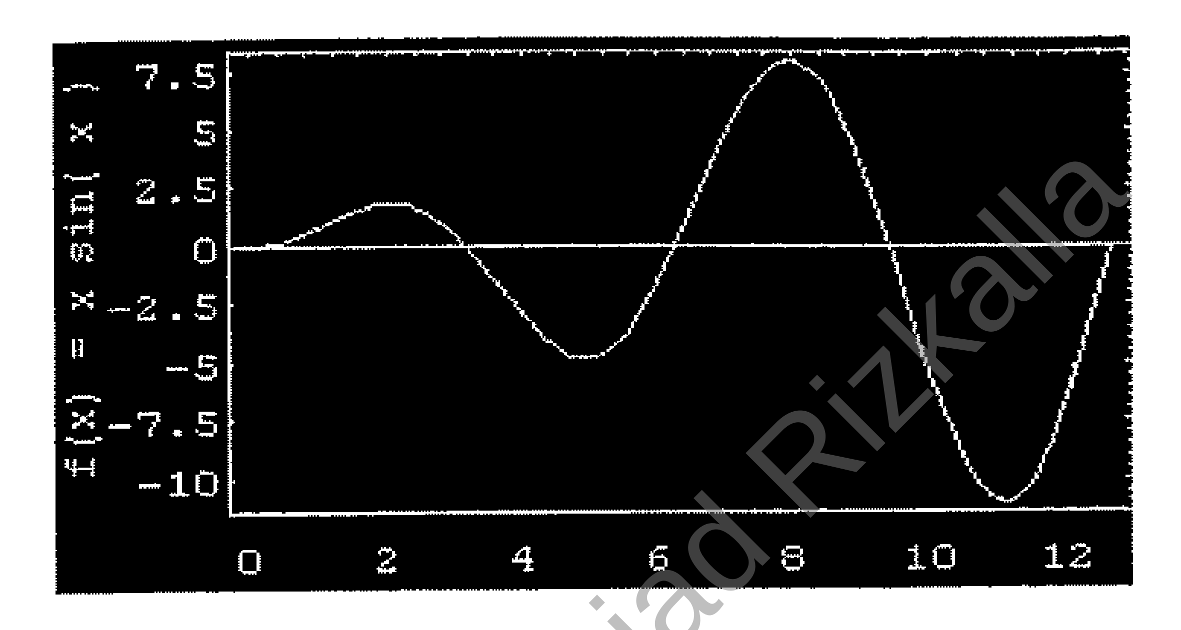
In[19]:= p3=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi}]



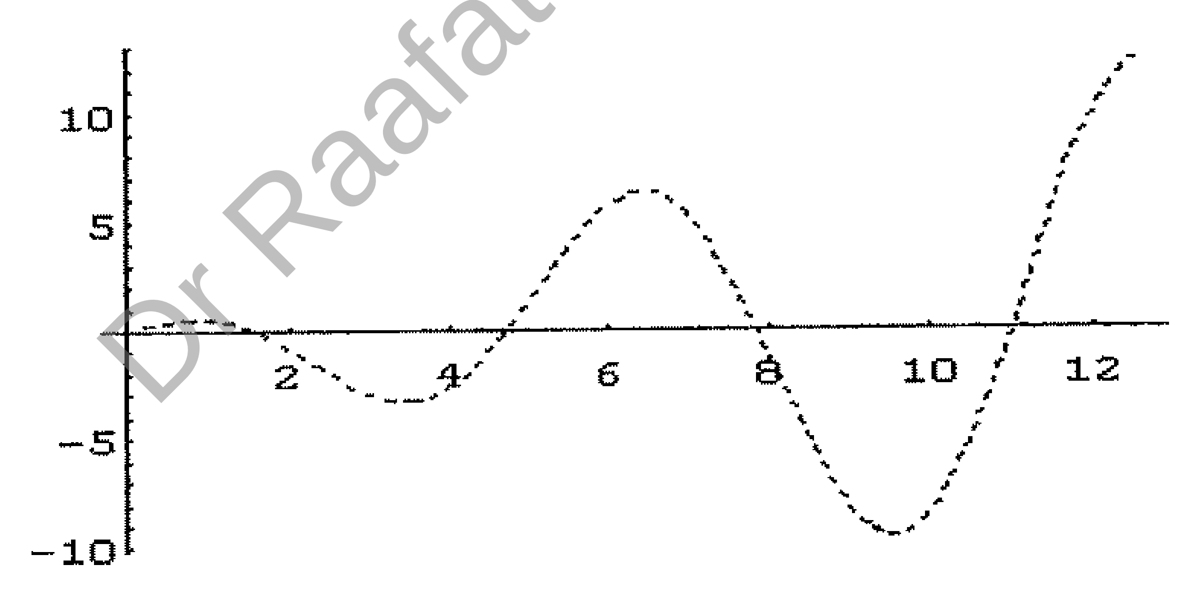
**In[20]:= Show[p3,PlotRange->{{Pi/2,5Pi/2},{-6,9}},
PlotLabel->" ** Small Region of the plot f(x)= x sin(x) **"]**



```
In[21]:= Show[p3,Frame->True,FrameLabel->" f(x) = x sin( x )",
            Background->GrayLevel0]]
```

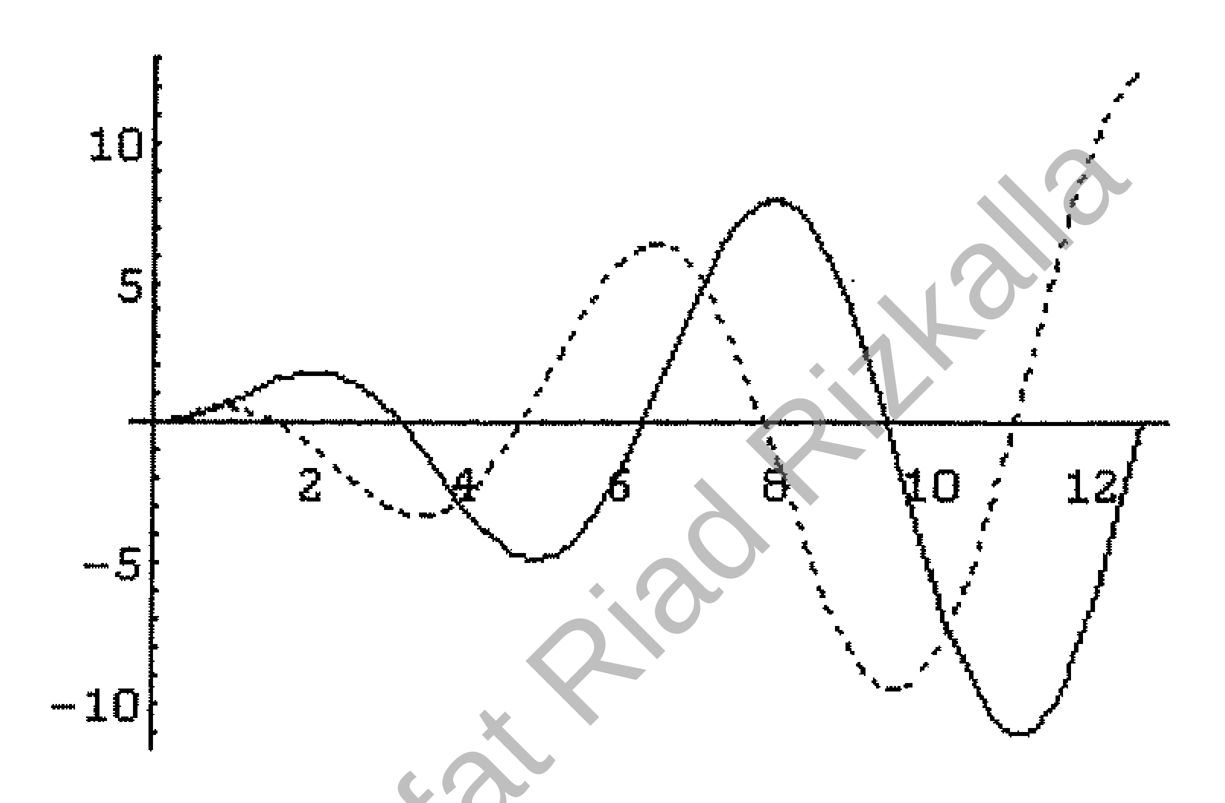



```
In[22]:=p4=Plot[x Cos[x],{x,0,4Pi},PlotStyle->Dashing[{0.01}]]
```





In[23]:= Show[p3,p4]



وفى برنامج ماثيماتيكا فإن جميع الرسوم الناتجة من الأمر **Plot** يتم تكوينها من قوائم من الرسوم الأولية **graphics primitives** المناسبة والموجودة داخل بنـــاء ماثيماتيكـــا وبعد ذلك يتم عرضها بالصـــورة التى نراها

والجدول التالي يوضح بعض الرسوم الأولية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا .

Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتج
Point[{x,y}]	رسم نقطة في المستوى لها الإحداثيات (x,y)
Line[{{x1,y1},{x2,y2}}]	رسم خط مستقيم يمر بالنقطتين (x1,y1) , (x2,y2)
Line[{{x1,y1},{x2,y2},{x3,y3},...}]	رسم خط منكسر يمر بالنقط المعطاة على الترتيب
Rectangle[{xmin,ymin},{xmax,ymax}]	رسم مستطيل إحداثيات رؤوسه على أحد القطرين هي (xmin,ymin) , (xmax,ymax)
Polygon[{{x1,y1},{x2,y2},...}]	رسم شكل كثير الأضلاع له الرؤوس المعطاة
Circle[{h,k},r]	رسم دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r
Circle[{h,k},{rx,ry}]	رسم قطع ناقص مركزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع من محور y يساوى ry
Circle[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r والقطاع يمتد من الزاوية t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة

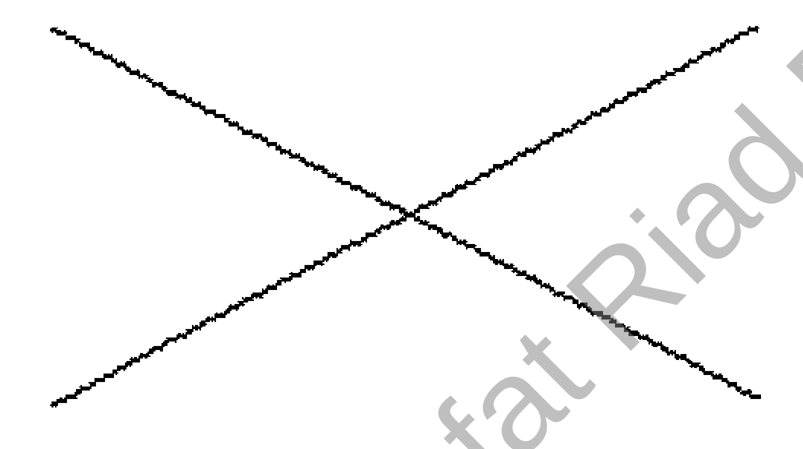
Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتـــــــــج
Disk[{h,k},r]	رسم قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطـــة (h,k) ونصف قطره r
Disk[{h,k},{rx,ry}]	رسم قرص ممتلئ على هيئة قطع نـــاقص مركـــزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محـــور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع مـــن محـــور y يساوى ry
Disk[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطـــة (h,k) ونصف قطره r والقطاع يمتد من الزاويـــة t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاســـه بـــالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة
Text[expr,{x,y}]	كتابة النص expr متمركزا عند النقطة (x,y)
GrayLevel[i]	عرض الأشياء التالية له باللون الرمادى بمســـتوى تلوين i يتراوح بين 0 , 1
RGBCdor[r,g,b]	عرض الأشياء التالية له ملونة بمســـتوى تلويـــن يتراوح بين 0 , 1 للون الأحمر r والأخضـــر g والأزرق b
PintSize[s]	رسم النقطة التالية فى الأمر Plot كمناطق دائرية نصف قطرها s حيث s تمثل كسر مـــن العـــرض الكلى للرسم
Thickness[t]	رسم الخطوط بسمك t حيث t تمثل كسر مـــن العرض الكلى للرسم
Dashing[{d1,d2,...}]	رسم الخطوط على صورة أجزاء متقطعة أطوالهـــا d1,d2,... على التتابع حيث di تمثل كسر مـــن العرض الكلى للرسم

ويمكن للمستخدم التعامل مباشرة مع الرسوم الأولية باستخدام الأمر Graphics كالآتي :

Graphics[primitives,options]
Graphics[{primitive1,primitive2,...}]

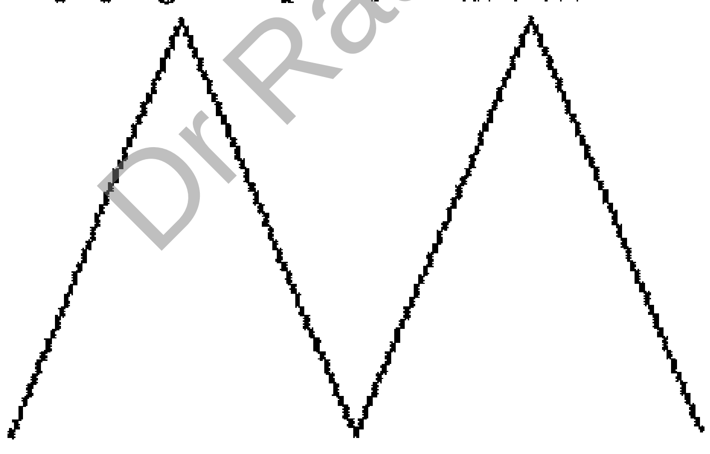
وناتج تنفيذ الأمر Graphics يكون رسالة على الصورة – Graphics – بدون ظهـــور الرسم ويتم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show .

```
In[24]:= g1=Graphics[{Line[{{-1,-1},{1,1}}],Line[{{-1,1},{1,-1}}]}]; Show[g1]
```



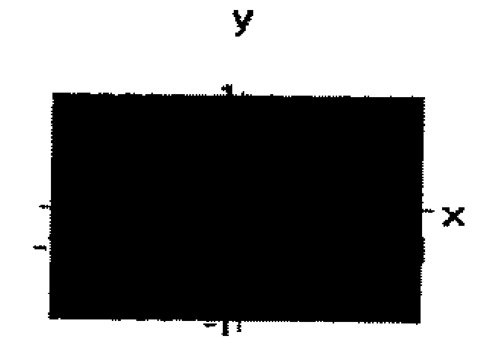
استخدام الأمر Graphics في رسم خط مســـتقيم يصل بين النقطتين (1,1) , (-1,-1) وخط مستقيم يصـــل بين النقطتين (1,-1) , (-1,1) ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[25]:= g2=Graphics[Line[{{0,0},{1,1},{2,0},{3,1},{4,0}}]];Show[g2]
```



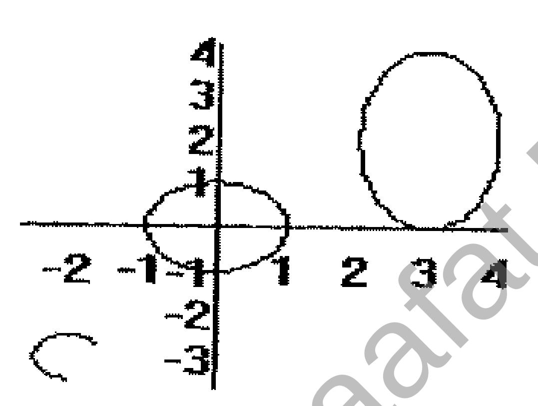
استخدام الأمر Graphics في رسم خطوط منكسرة تصل النقط المعطاة (0,0),(1,1),(2,0) ,(3,1),(4,0) على الترتيب ثم إظهار الرســـم باستخدام الأمر Show

```
In[26]:= g3=Show[Graphics[Rectangle[{-1,-1},{1,1}]],
            Axes->True,AxesLabel->{"x","y"}]
```



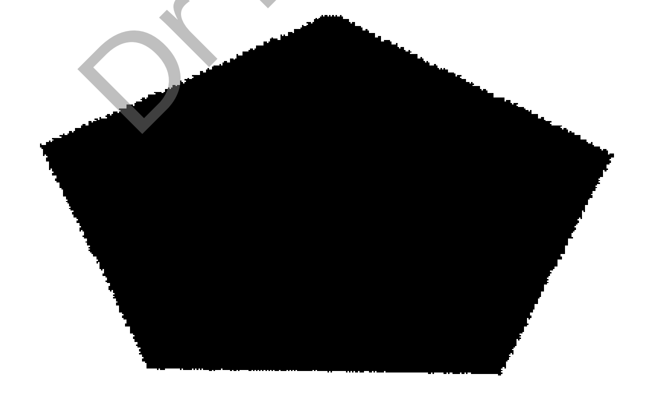
رسم مستطيل إحداثيات رؤوس قطر فيه هي (1,1) , (-1,-1) وتم إضافة اختيار عمل محاور وكتابة العنوان x على المحور الأفقي والعنوان y على الراسي

```
In[27]:=one=Graphics[Circle[{0,0},1]];two=Graphics[Circle[{3,2},{1,2}]];
   three=Graphics[Circle[{-2,-3},.5,{Pi/4,3Pi/2}]];
   Show[one,two,three,Axes->True,AspectRatio->1]
```



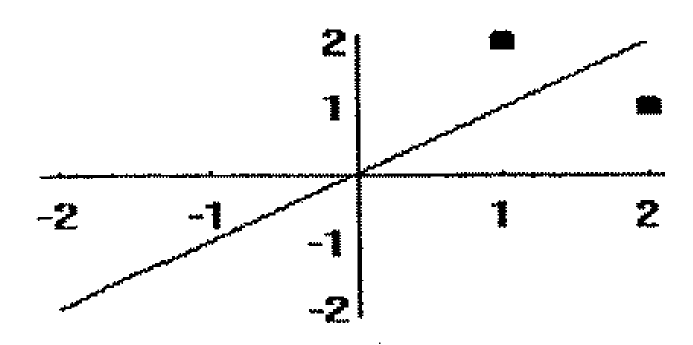
رسم دائرة مركزها النقطة (0,0) ونصف قطرها 1 وقطع ناقص مركزه النقطة (3,2) وقطاع من دائرة مركزها النقطة (-2,-3) وممتد من الزاوية Pi/4 الى الزاوية 3Pi/2 ثم إظهار الرسوم الثلاثة معا باستخدام الأمر Show

```
In[28]:= pentagon=Table[N[{Sin[2 n Pi/5],Cos[2 n Pi/5]}],{n,5}];
          Show[Graphics[Polygon[pentagon]]]
```



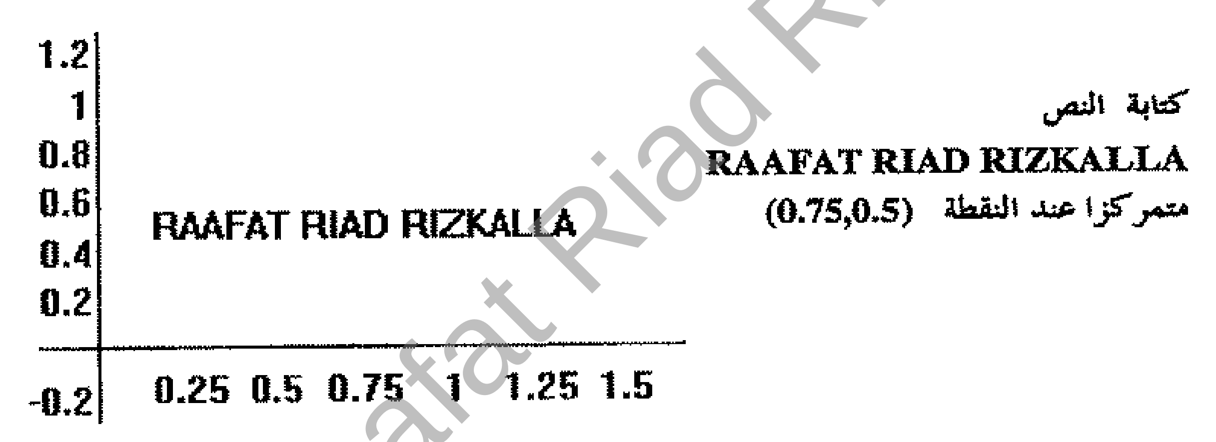
عمل قائمة pentagon تحتوى على إحداثيات الشكل الخماسي ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[29]:= Show[Graphics[{Line[{{-2,-2},{2,2}}],PointSize[0.03],
         Point[{2,1}],Point[{1,2}]}],Axes->True]
```



إظهار رسم الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (2,2) , (-2,-2) مع رسم نقط بالحجم 0.03 عند الإحداثيات (2,1) , (1,2)

```
In[30]:= text1=Graphics[Text[RAAFAT RIAD RIZKALLA, {0.75,0.5}]];
         Show[text1,Axes->True]
```



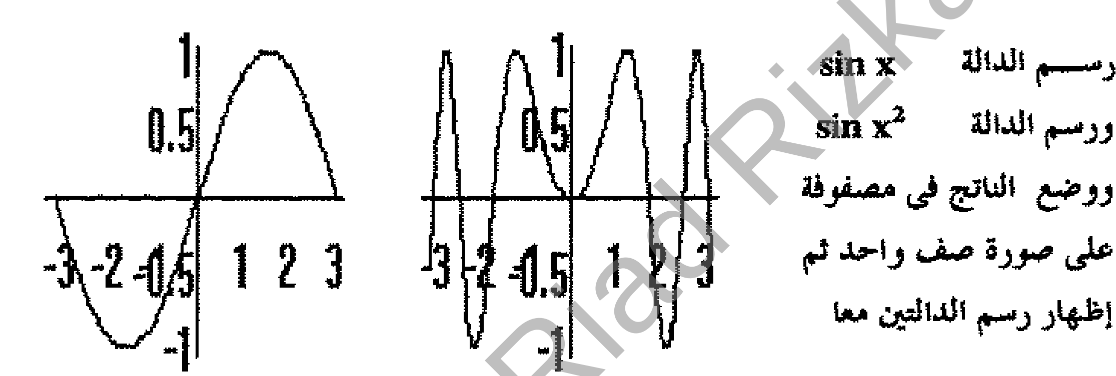
كتابة النص **RAAFAT RIAD RIZKALLA** متمركزا عند النقطة (0.75,0.5)

وفي ماثيماتيكا يمكن تكوين مصفوفة من أي بعد عناصرها أشكال مرسومة وذلك باستخدام الأمر **GraphicsArray** كالآتي :

GraphicsArray[{graph1,graph2,...}] عمل صف من الأشكال المرسومة graph1,graph2,...
GraphicsArray[{graph11,graph12,...},{graph21,graph22,...},...] عمل مصفوفة من الأشكال المرسومة الصف الأول به الرسوم graph11,graph12,... والصف الثاني به الرسوم graph21,graph22,...

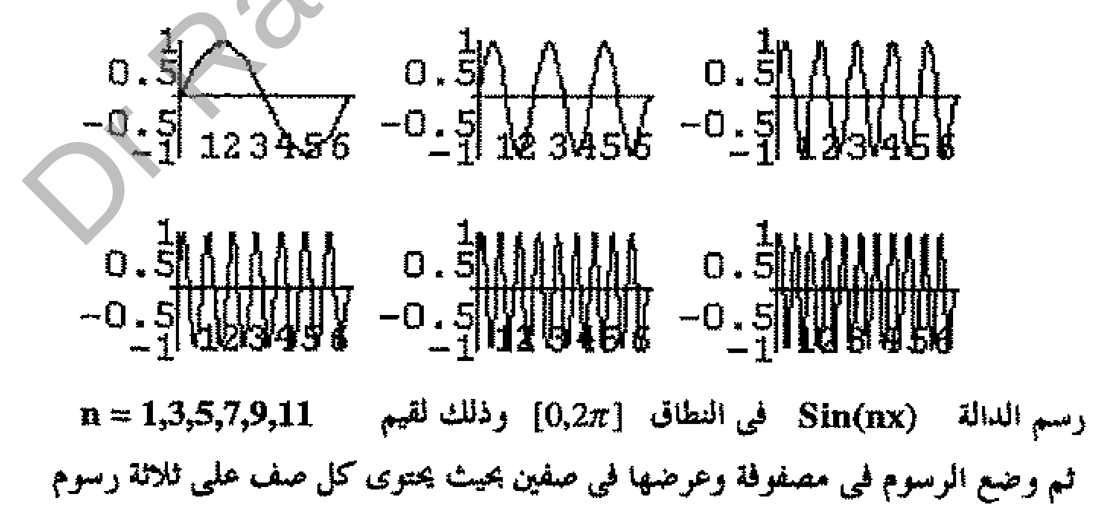
والأشكال المرسومة داخل المصفوفة GraphicsArray يتم عرضها بواسطة الأمـــر Show حيث تظهر الرسوم فى مناطق مستطيلة مرتبة في صفوف ومع الأمر GraphicsArray يمكن إضافة اختيارات الأمر Plot بالإضافة الى الاختيار GraphicsSpacing وقيمته الفعالة 0.1 وهو يستخدم للتحكم فى الفراغ بين مناطق الرسم المستطيلة المرسوم داخلها عناصر المصفوفة .

```
In[31]:= p1one=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
         p2two=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
         Show[GraphicsArray[{p1one,p2two}]]
```



رســـم الدالة $\sin x$
ورسم الدالة $\sin x^2$
ووضع الناتج فى مصفوفة
على صورة صف واحد ثم
إظهار رسم الدالتين معا

```
In[32]:= psin[n_]:=Plot[Sin[n x],{x,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
                a=Partition[Table[psin[n],{n,1,11,2}],3];
                 Show[GraphicsArray[a]]
```



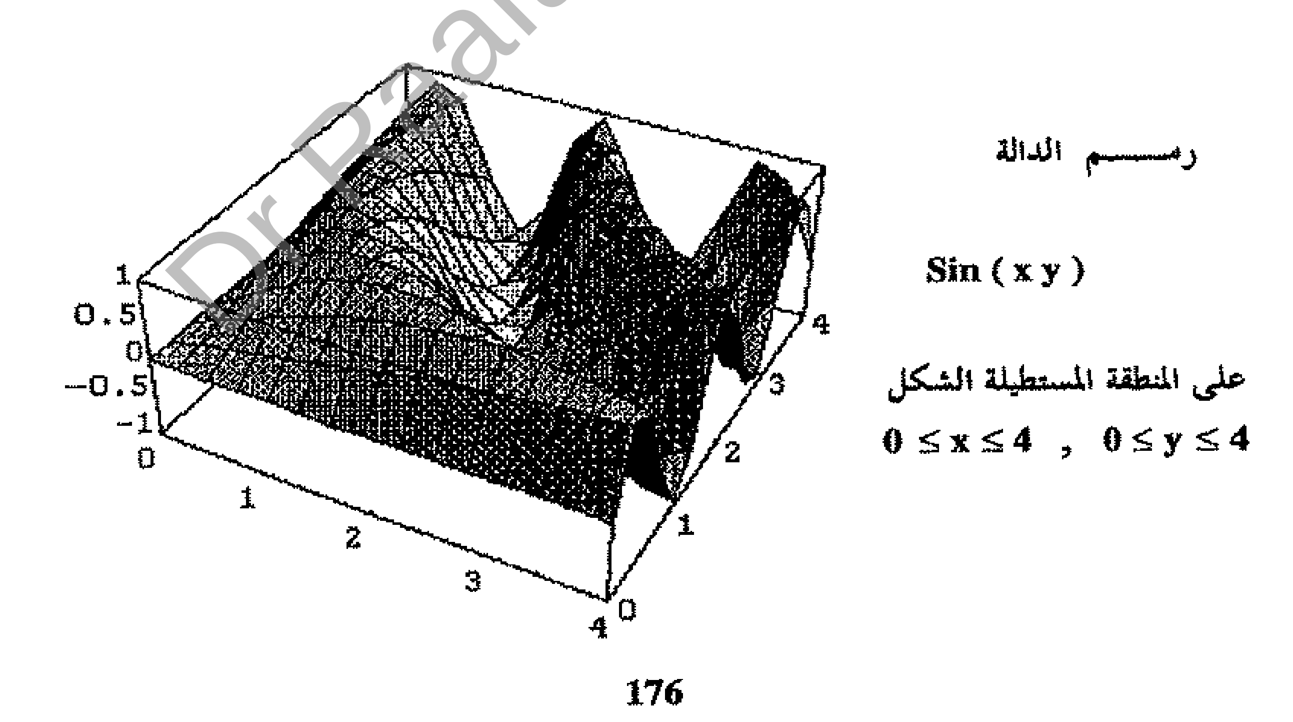
رسم الدالة Sin(nx) فى النطاق $[0,2\pi]$ وذلك لقيم n = 1,3,5,7,9,11
ثم وضع الرسوم فى مصفوفة وعرضها في صفين بحيث يحتوى كل صف على ثلاثة رسوم

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

الدالة في متغيرين يرمز لها z=f(x,y) حيث x,y متغيرات مستقلة , z متغير تابع ونطاق الدالة f(x,y) يقع في المستوى xy ويمثله مجموعة النقط (x,y) المعرف عندها الدالة بينما مدى الدالة f(x,y) يقع على محور z في الفراغ ورسم الدالة z = f(x,y) هو عبارة عن سطح في الفراغ يمثله مجموعة النقط (x,y,z) التى تحقق المعادلة z = f(x,y) . وفى ماثيماتيكا يمكن رسم الدوال فى الفراغ باستخدام الأمر Plot3D كالآتي :

Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

In[1]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}]



رســـــم الدالة

Sin (x y)

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$

وكما في حالة الأمر Plot للرســـم في المســـتوى فإنه يوجد العديد من الاختيارات التـــي تتحكم في شـــكل الرســـم في الفراغ ويمكن الاستعلام عن الاختيارات الفعالـــة للأمـــر Plot3Dباستخدام الأمر Options كالآتي :

In[2]:=Options[Plot3D]

{AmbientLight -> GrayLevel[0], AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, AxesEdge -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic, Boxed -> True, BoxRatios -> {1, 1, 0.4},. BoxStyle -> Automatic, ClipFill -> Automatic, ColorFunction -> Automatic, ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, FaceGrids -> None, HiddenSurface -> True, Lighting -> True, LightSources -> {{{1., 0., 1.}, RGBColor[1, 0, 0]}, {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]}, {{0., 1., 1.}, RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True, MeshStyle -> Automatic, PlotLabel -> None, PlotPoints -> 15, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, Plot3Matrix -> Automatic, Prolog -> {}, Shading -> True, SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic, ViewCenter -> Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, ViewVertical -> {0., 0., 1.}, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction}

والآن نعرض بالتفصيل بعض الاختيارات المستخدمة مع الأمر Plot3D والقيمة الفعالة لكـــل منها بالإضافة الى قيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم في الفراغ وهذه الاختيـــارات يمكن استخدامها أيضا مع أمر إعادة الرسم Show .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Axes->True	رسم محاور الإحداثيات x , y , z	Axes->False
AxesLabel->None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel->"z-label" -AxesLabel >{"x","y","z"}
PlotLabel->None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel->" any label "
PlotPoints->15	عدد نقط العينة في الاتجاهين x,y والتي يتم عندها حساب قيم الدالة وهذا الاختيار لا يستخدم مع الأمر Show	PlotPoints->n PlotPoints->{nx,ny}
PlotRange->Automatic	مدى الإحداثيات المستخدمة في الرسم	PlotRange->{zmin,zmax} PlotRange->{{xn,xx}, {yn,yx},{zn,zx}} PlotRange->All
Ticks->Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	Ticks->None Ticks->{xt,yt,zt} حيث xt , yt , zt يمكن أن تأخذ القيم None أو Automatic

```
In[3]:=rp1=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

استخدام المتغير **rp1** كمخزن لرســـــم الدالة

Sin(x y)

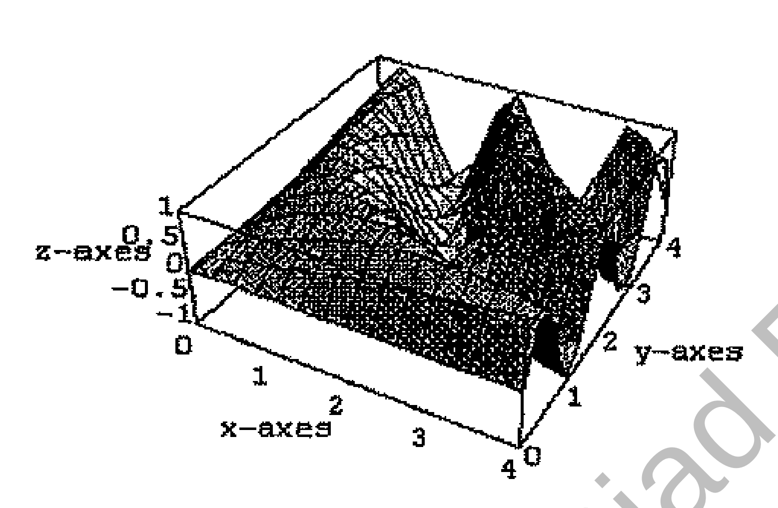
على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4 \;,\; 0 \le y \le 4$

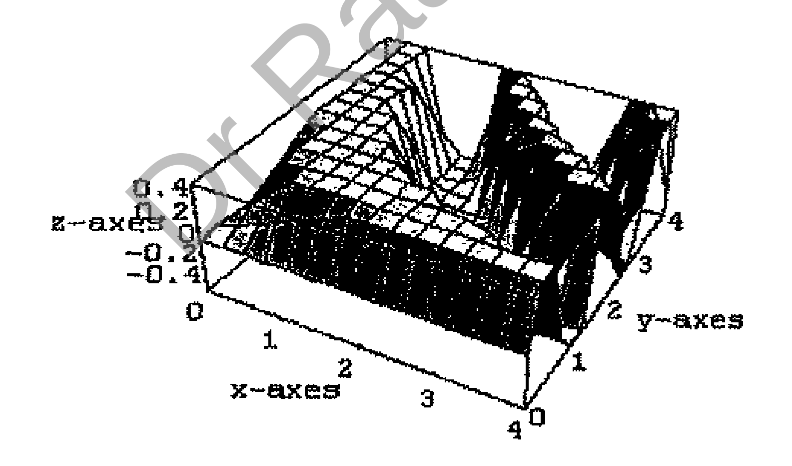
مع كتابة العناوين

x-axes , y-axes , z-axes

على محاور الإحداثيات




```
In[4]:=rp2=Show[rp1,PlotRange->{-0.5,0.5}]
```



استخدام المتغير **rp2** كمخزن يوضع داخله أمر إعادة الرسم **Show** للشكل السابق **rp1** مع تغيير مدى الرسم بالاختيار

PlotRange->{-0.5,0.5}

```
In[5]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotPoints->40,
        Ticks->{None,None,Automatic}]
```

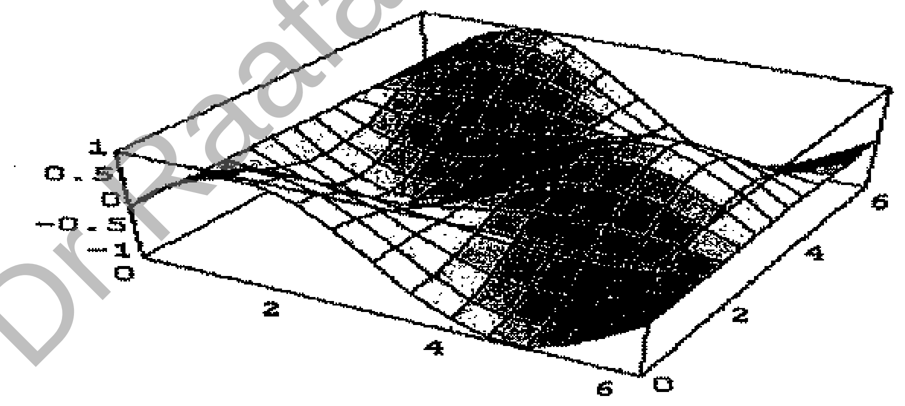


رســـــــــم الدالة
Sin(x y)
على المنطقة المستطيلة الشكل
$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$
مع استخدام الاختيار
PlotPoints->40
وترقيم محور الإحداثيات z فقط

والأشكال الناتجة من الأمر **Plot3D** يمكن النظر أليها على أنها صور فوتوغرافيـــة للســـطوح وتوجد بعض الاختيارات مع الأوامر **Plot3D, Show** يمكن من خلالها فحص السطوح من مواضع مختلفة ومن أهم هذه الاختيارات هو الاختيار **ViewPoint** لتحديد إحداثيات النقطة فى الفراغ التى يتم وضع آلة التصوير عندها لالتقاط صور للسطح وبالتالى يمكن التعـــرف علـــى الملامح المختلفة للسطح عن طريق وضع الكاميرا فى أماكن مختلفة ، ويقوم ماثيماتيكـــا بوضـــع السطح داخل صندوق باستخدام الاختيار **Boxed** وأبعاد هذا الصندوق يمكن التحكم فيهـــا بواسطة الاختيار **BoxRatios** .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ViewPoint->{1.3,-2.4,2}	تحديد إحداثيات نقطة في الفراغ يتم النظر من عندها الى السطح وهذه الإحداثيات تكون بالنسبة الى مركز الصندوق	**ViewPoint->{xv,yv,zv}** تحديد آي نقطة (xv,yv,zv) في الفراغ
Boxed->True	رسم صندوق حول السطح	**Boxed->False**
BoxRatios->{1,1,0.4}	تحديد النسبة بين أطوال اوجه الصندوق في اتجاه المحاور x,y,z على الترتيب	**BoxRatios->{nx,ny,nz}** جعل النسبة nx:ny:nz بين أطوال اوجه الصندوق

In[6]:=rp3=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2P}]



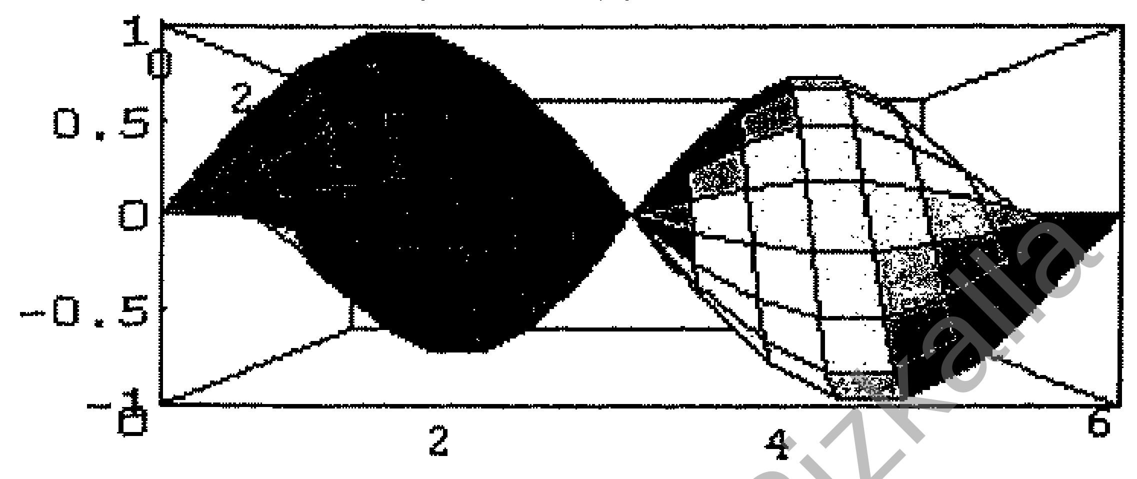
استخدام المتغير **rp3** كمخزن لرسم سطح الدالة **sin(x) cos(y)** في النطاق

$$0 \le x \le 2\pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi$$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات الفعالة (**1.3 , -2.4 , 2**)



```
In[7]:=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi},ViewPoint->{0,-2,0}]
```

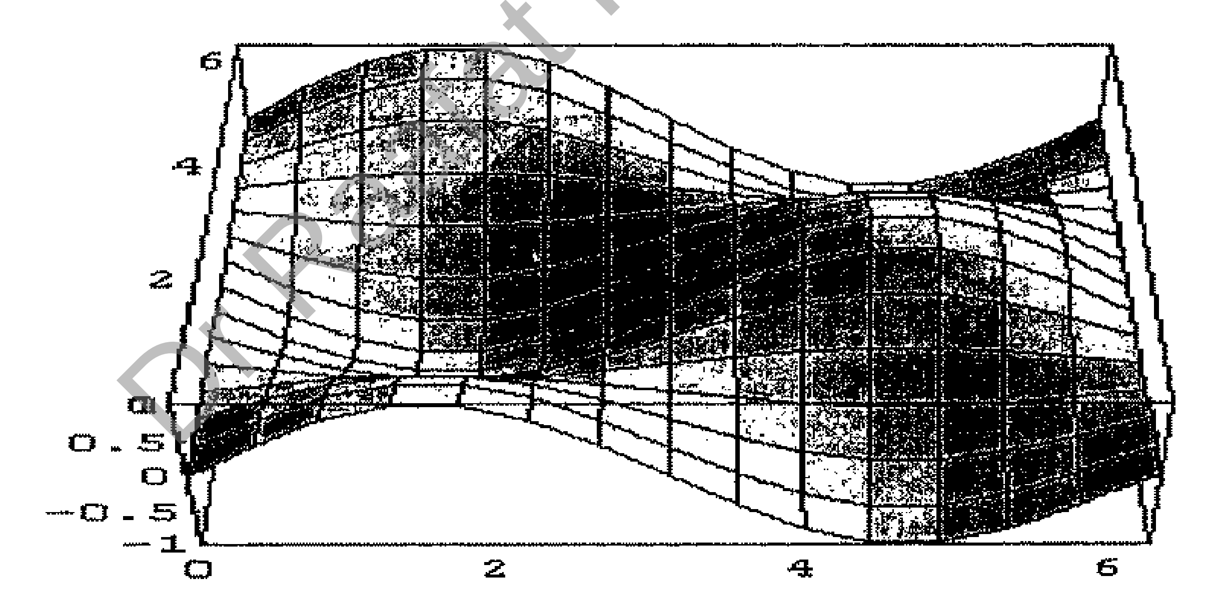


رســــــم سطح الدالة sin(x) cos(y) فى النطاق

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

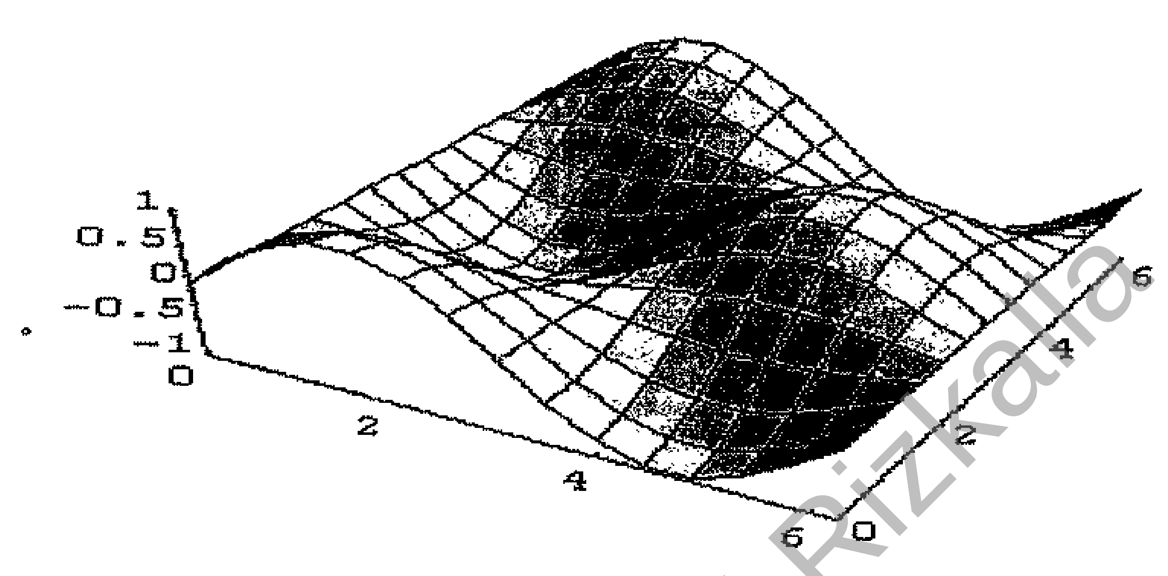
حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات (0, -2, 0)

```
In[8]:=Show[rp3,ViewPoint->{0,-4,4}]
```



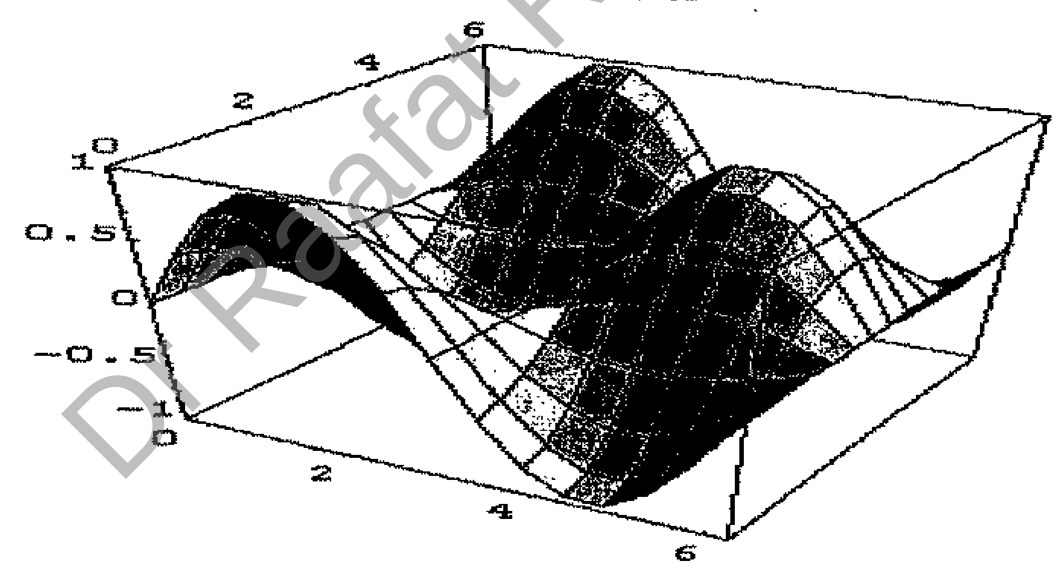
استخدام الأمر Show فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير rp3 حيث يتم تغيير موضع آلة التصوير الى الإحداثيات (0 , -4 , 4)

In[9]:=Show[rp3,Boxed->False]



استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp3** حيث يتم عرض السطح فقط وبدون رسم صندوق من حوله وذلك عن طريق الاختيار **Boxed->False**

In[10]:=Show[rp3,BoxRatios->{1,1,1}]

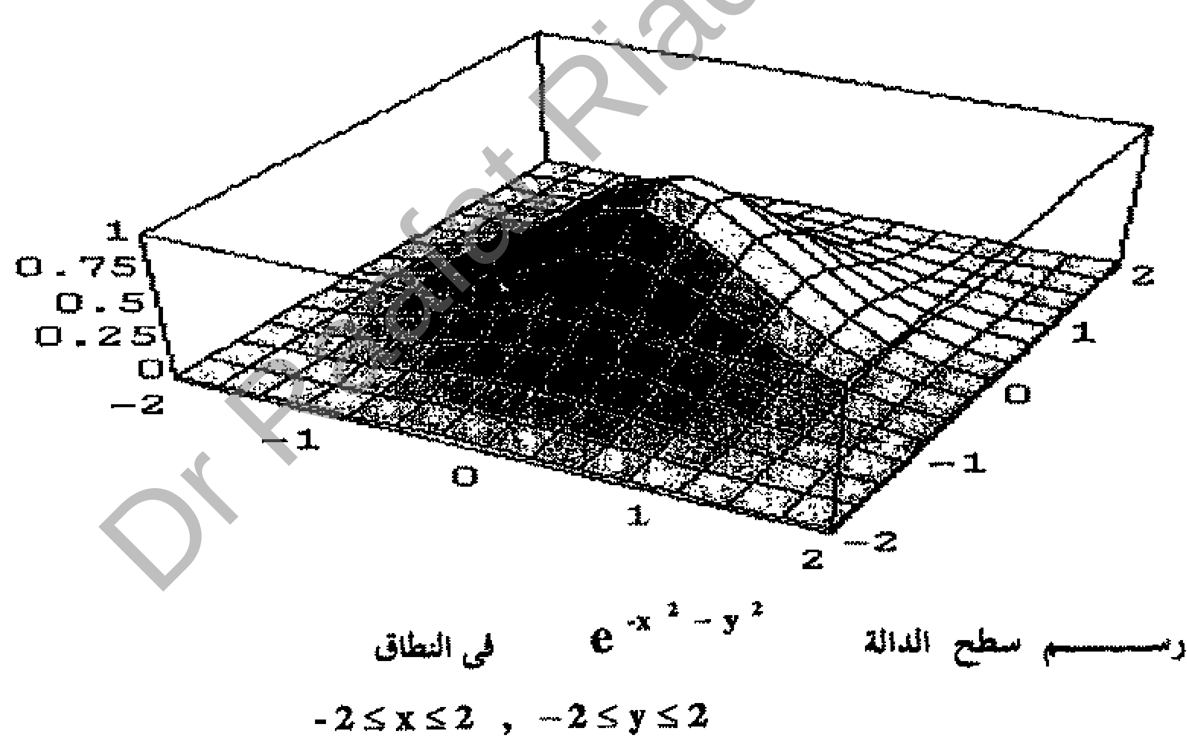


استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp3** حيث يتم عرض السطح داخل صندوق مكعب الشكل وذلك عن طريق الاختيار **BoxRatios->{1,1,1}**

وعند رسم السطوح فى الفراغ يمكن التحكم فى الأجزاء المختفية من السطح باستخدام الاختيار HiddenSurface كما يمكن عمل ظلال للسطح باستخدام الاختيار Shading أو عمل شبكة على السطح فى اتجاه المحاور x,y وذلك باستخدام الاختيار Mesh

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
HiddenSurface->True	منع ظهور الأجزاء المختفية من السطح	HiddenSurface->False
Shading->True	عمل ظلال للسطح	Shading->False
Mesh->True	رسم شبكة على السطح فى اتجاه المحاور x,y	Mesh->False

```
In[11]:=rp4=Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

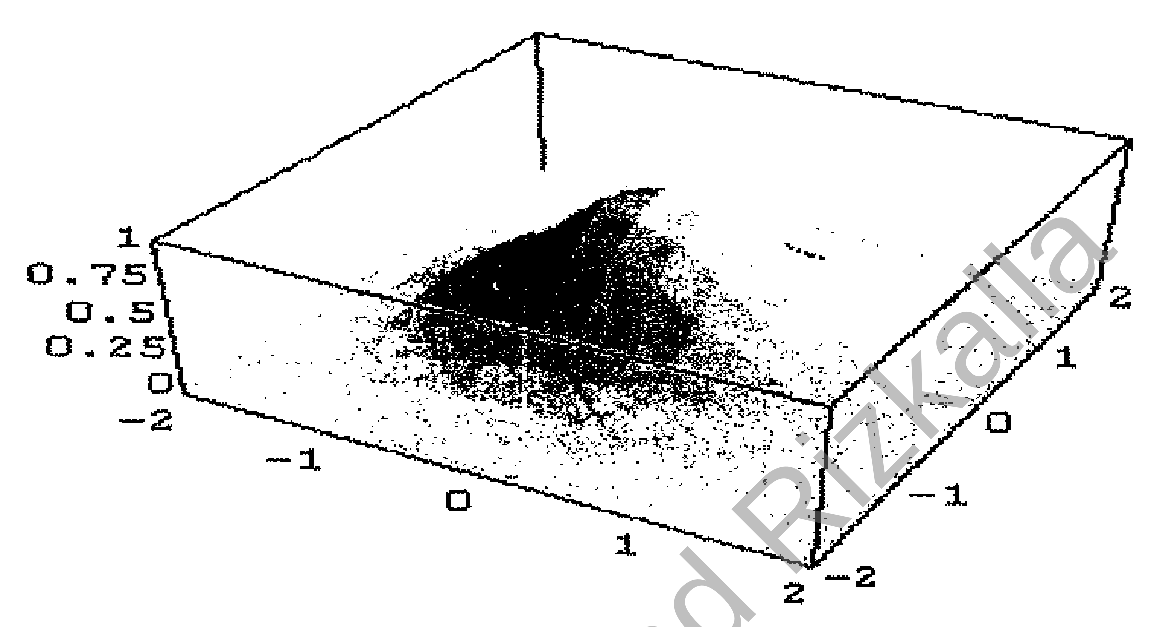


رسم سطح الدالة $e^{-x^2-y^2}$ فى النطاق

$$-2 \le x \le 2 \quad , \quad -2 \le y \le 2$$

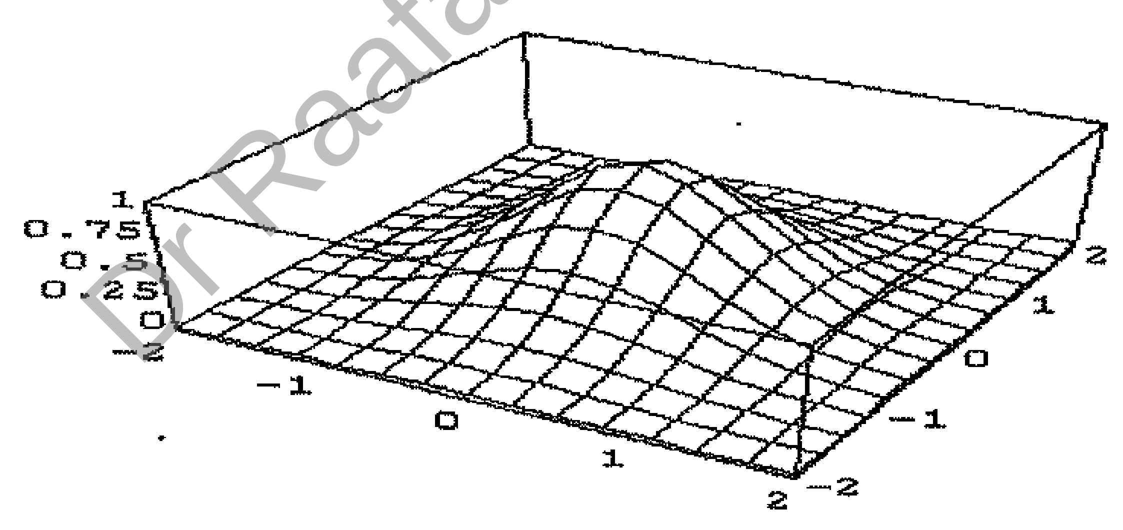
ونلاحظ وجود شبكة على السطح فى اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار الفعال Mesh->True

In[12]:=Show[rp4,Mesh->False]



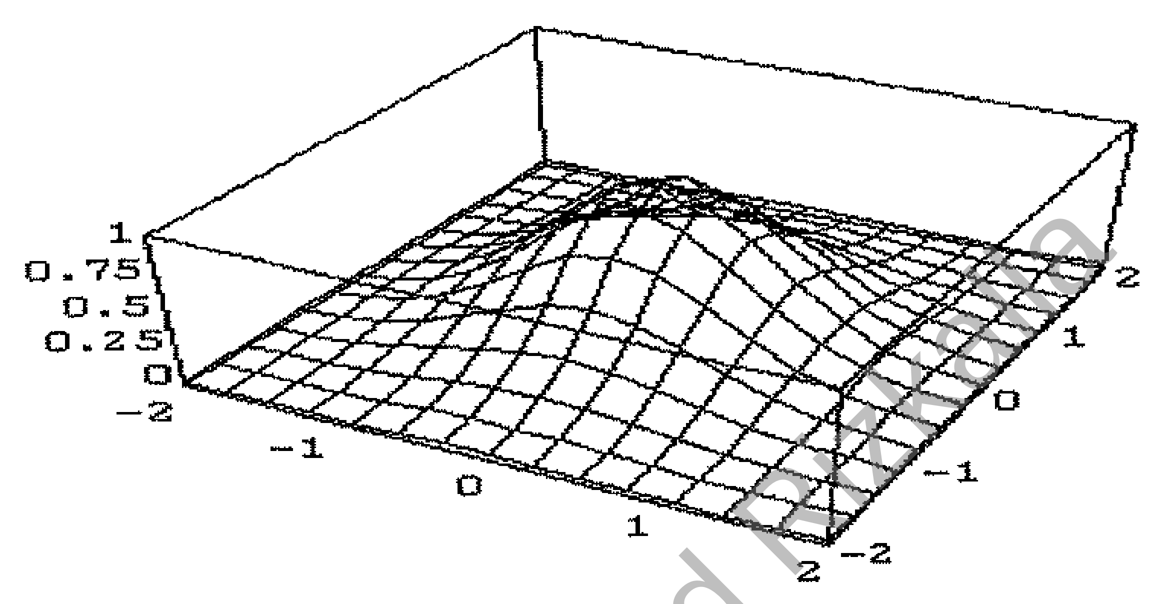
استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون رسم شبكة على السطح في اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار Mesh->False

In[13]:=Show[rp4,Shading->False]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون تظليل السطح وذلك نتيجة الاختيار Shading->False

In[14]:=Show[rp4,HiddenSurface->False]

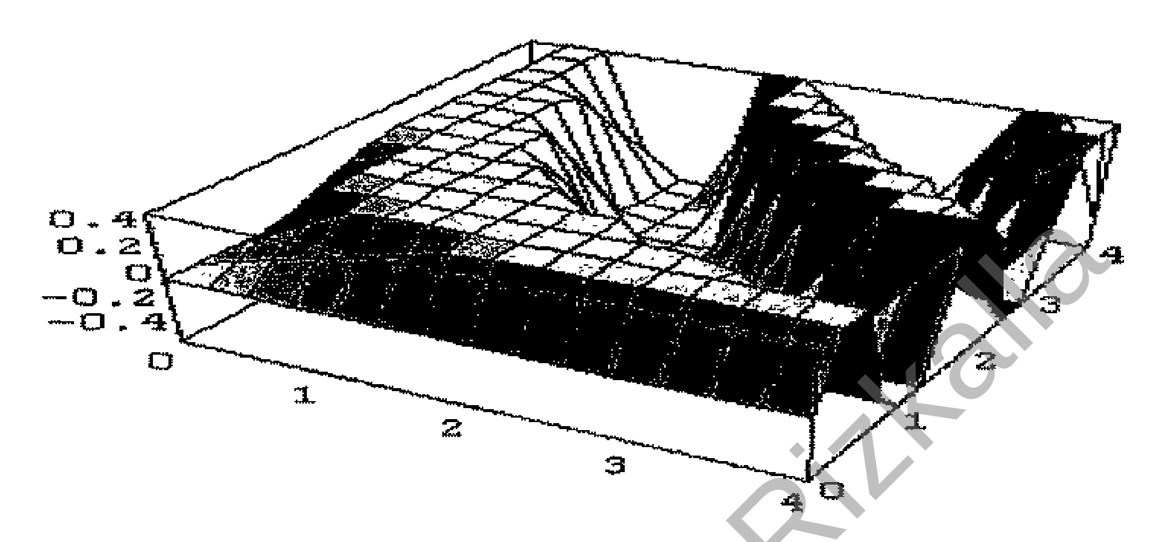


استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp4** حيث يتم إظهار الأجزاء المختفية من السطح وذلك نتيجة الاختيار **HiddenSurface->False**

وعند رسم السطوح في الفراغ يقوم ماليماتيكا بقطع أجزاء السطح الخارجة عن الصندوق ويمكن توضيح الأماكن التي تم فيها قطع السطح باستخدام الاختيار **ClipFill** كالآتي :

Option Name اسم الاختيار **Default value** وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ClipFill->Automatic	توضيح الأماكن التي تم عندها قطع السطح وفقا للمواصفات الفعالة للرسم	**ClipFill->None** **ClipFill->GrayLevel[i]** **ClipFill->RGBColor[r,g,b]** **ClipFill->{bootom,top}**

In[15]:= rp5=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotRange->{-0.5,0.5}]

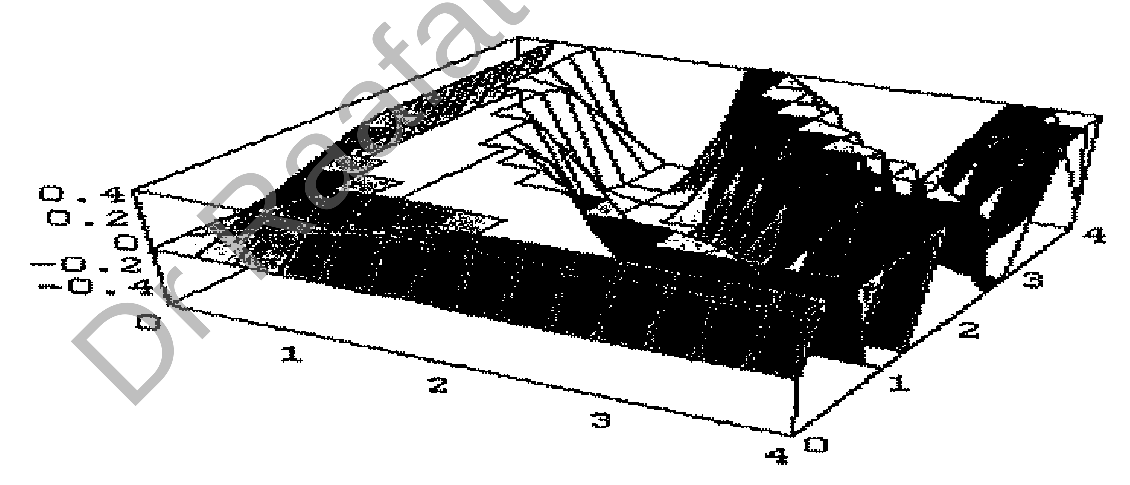


استخدام المتغير **rp5** كمخزن لرســم الدالة **Sin(x y)** على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 4$$

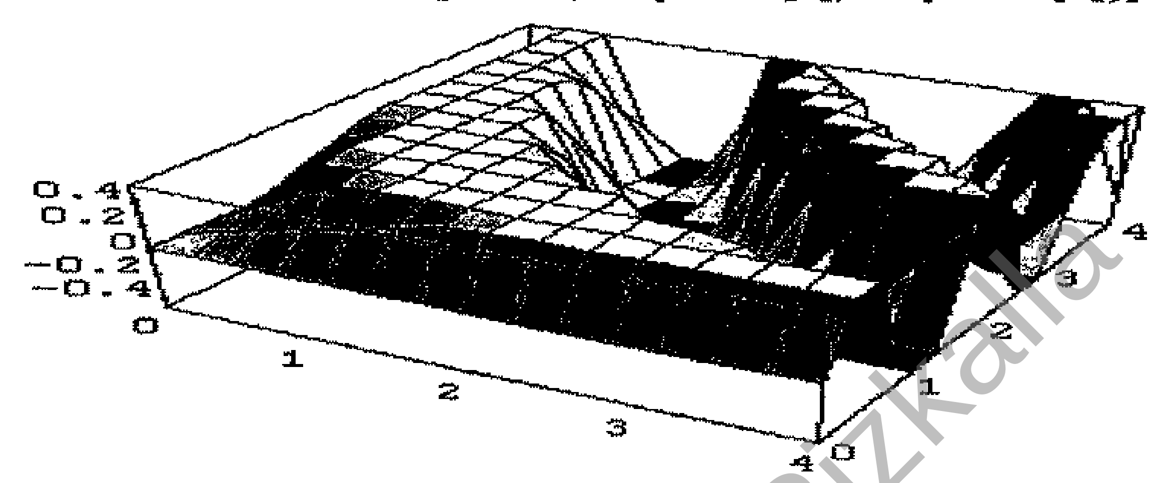
مع تغيير مدى الرســــــم بالاختيار **PlotRange->{-0.5,0.5}**

In[16]:= Show[rp5,ClipFill->None]



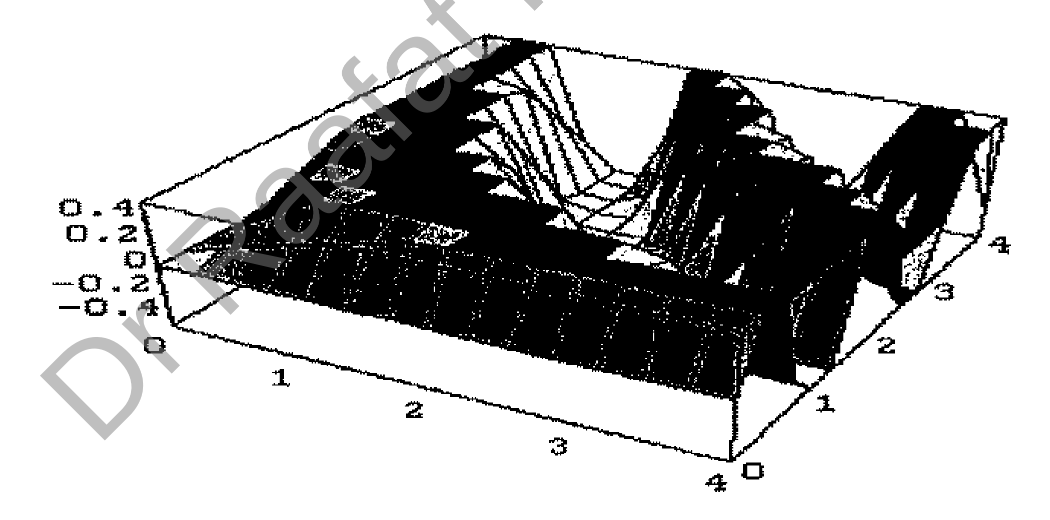
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرســـم المخزون فى المتغير **rp5** حيث يتم عرض الســـطح بحيث تترك الأجزاء المقطوعة من الســـطح واضحـــة بدون تظليل وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->None**

In[17]:= Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}]



استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp5** حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأسود ومن أعلى باللون الأبيض وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}**

In[18]:=Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}]



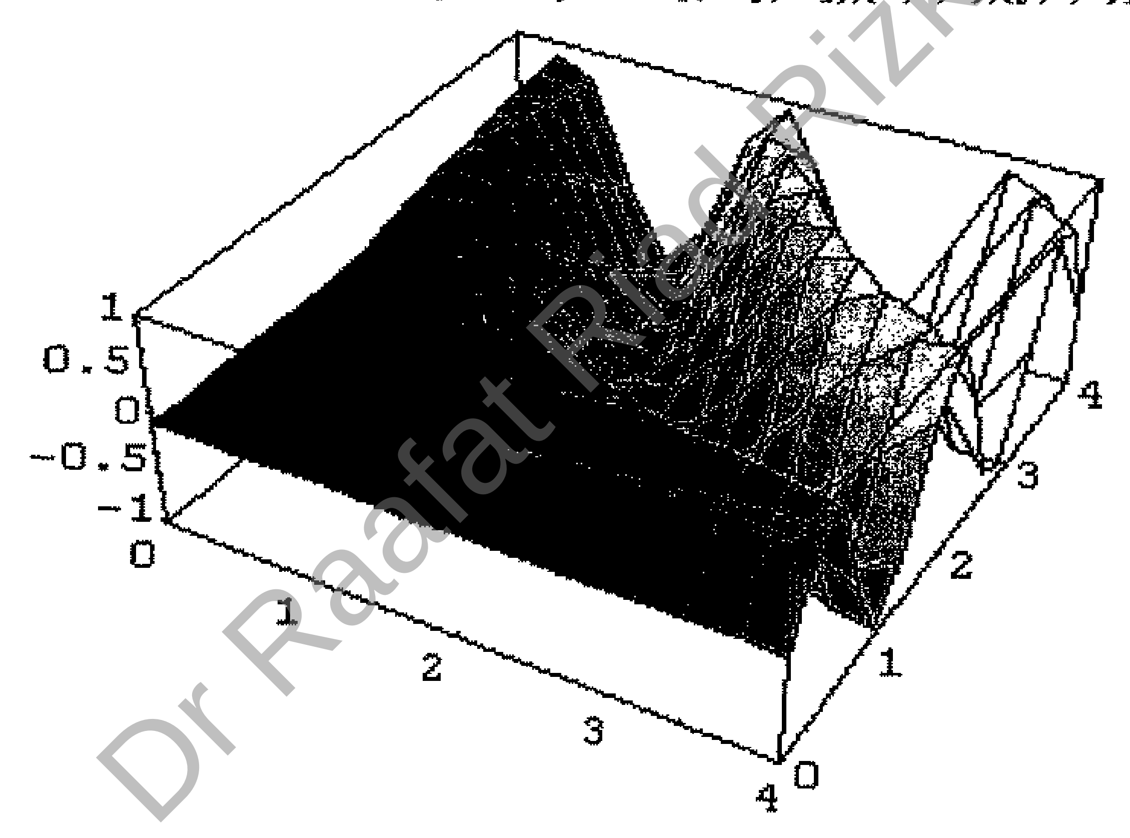
استخدام الأمر **Show** في إعادة الرسم المخزون في المتغير **rp5** حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأبيض ومن أعلى باللون الأسود وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}**

ويستطيع ماثيماتيكا تظليل كل جزء من سطح الدالة وفقا لموصفات معينة وذلك باستخدام الأمر Plot3D في الصورة الآتية :

```
Plot3D[{f(x,y),s},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]
```

رسم سطح الدالة f(x,y) مع تظليل السطح وفقا للدالة s

```
In[19]:=Plot3D[{Sin[x y],GrayLevel[(x+y)/8]},{x,0,4},{y,0,4}]
```



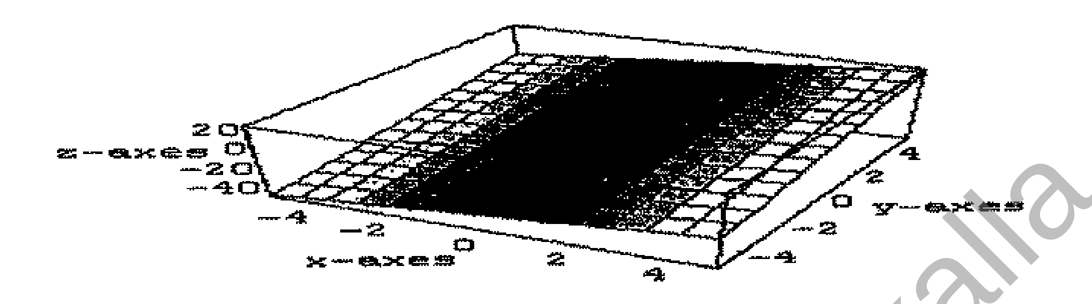
رسم الدالة Sin(x y) على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$$

وبحيث يتم تظليل سطح الدالة وفقا للدالة GrayLevel[(x+y)/8]

حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل للسطح

```
In[20]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[x]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

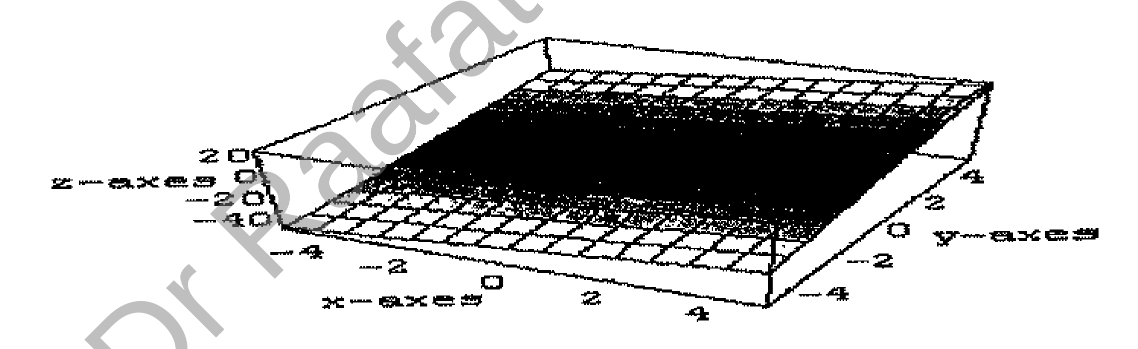


رســـــــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5 \quad , \quad -5 \leq y \leq 5$$

وبحيث يتم تظليل ســـطح المســـتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5 حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى فى اتجاه محور x كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

```
In[21]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[y]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



رســـــــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5 \quad , \quad -5 \leq y \leq 5$$

وبحيث يتم تظليل ســـطح المســـتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5 حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى فى اتجاه محور y كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

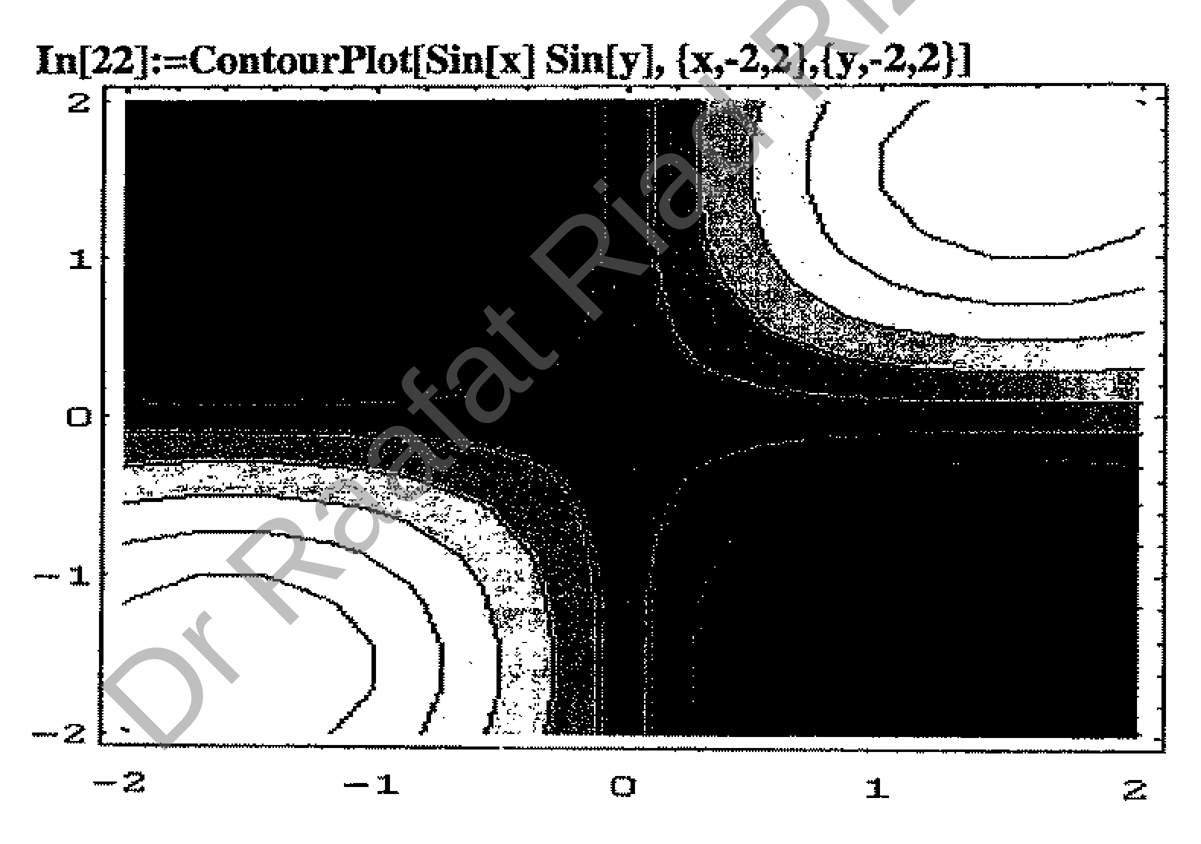
وعندما نحاول التعمق فى فهم طبيعة ســـــطح خاص فانه يكون من المفيد النظــــر الى الســـطح بطرق مختلفة والأمر Plot3D يقدم لنا صورة فى الفراغ للسطح وفى برنـــامج ماثيماتيكـــا يمكن الحصول على خريطة لمقاطع السطح بطريقة خطوط الكونتور التى تربط النقط الواقعة على الســــطح والتى لها نفس الارتفاع ويتم ذلك عن طريق الأمر ContourPlot كالآتي:

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

رســـم خطوط الكونتور للدالة **f (x,y)** فى النطاق من **= xmin** الى **x = xmax**

ومن **y = ymin** الى **y = ymax**

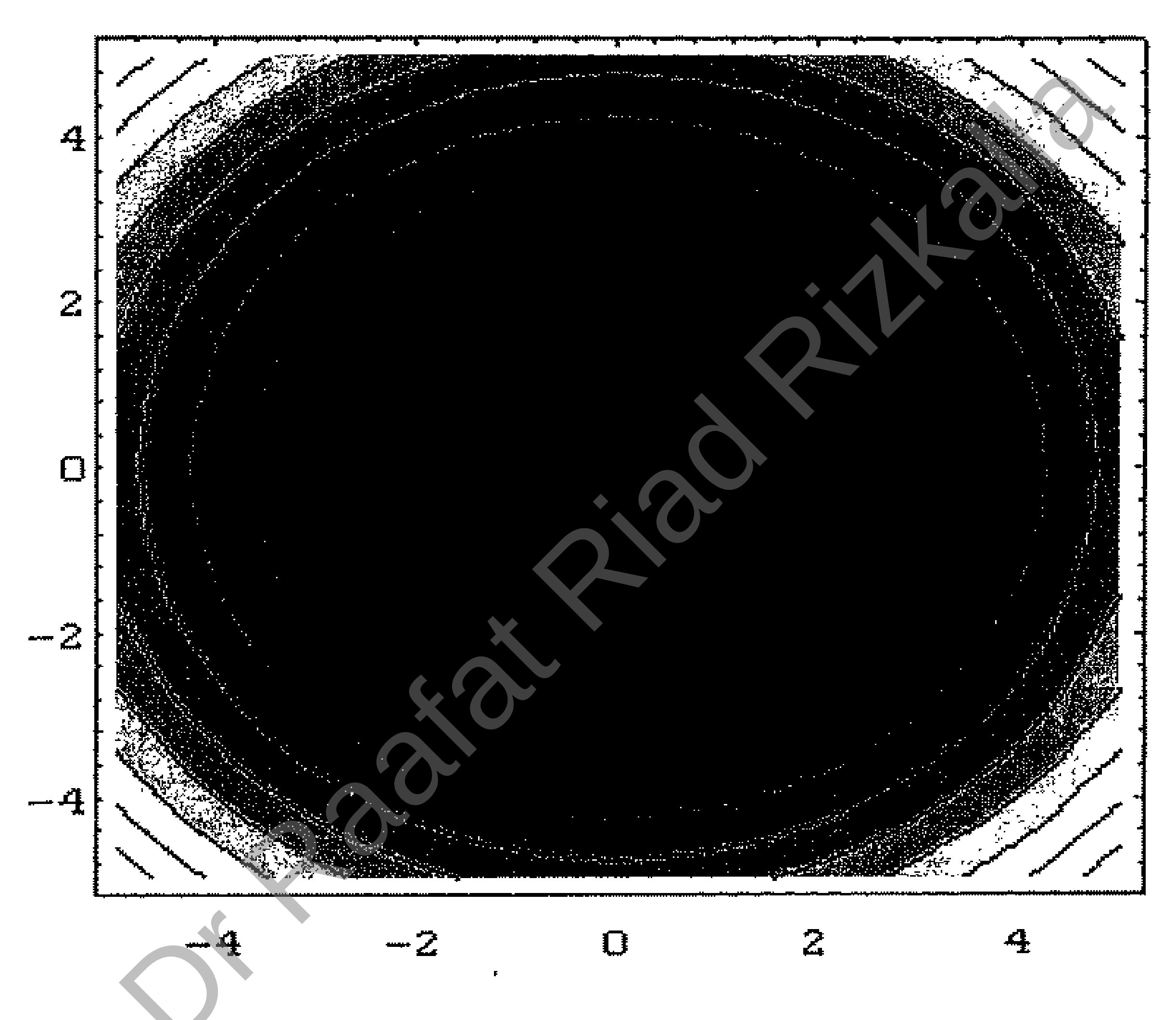
In[22]:=ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x,-2,2},{y,-2,2}]



رسم مقاطع سطح الدالة **f(x,y) = Sin(x) Sin(y)** بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$-2 \le x \le 2 \quad , \quad -2 \le y \le 2$

In[23]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x,-5,5},{y,-5,5}]



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$$

٣ • رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

إذا كان f(x) دالة وحيدة القيمة single valued فإن المعادلات التى على الصورة y = f(x) تصف منحنيات في المستوى يقطعها أي خط رأسي مرة واحدة فقط في نطاق التعريف ، والإحداثي y لكل نقطة يكون دالة في الإحداثي x ولكن توجد منحنيات اكثر تعقيدا تضاعف نفسها ومثل هذه المنحنيات يمكن دراستها بسهوله باستخدام الصورة البارامترية ويتم ذلك بجعل المتغيرات x , y دوال في متغير آخر t مثل x = g(t) , y = h(t) وكل قيمة للمتغير t تعين قيمة للمتغيرات x , y يمكن اعتبارها إحداثيات نقطة في المستوى xy وفئة جميع النقط (g(t),h(t)) تكون منحنى والمعادلتان x = g(t) , y = h(t) تسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى والمتغير t يسمى بارامتر • وبرنامج ماثيماتيكا قادر على رسم الدوال في المستوى بالصورة البارامترية وذلك باستخدام الأمر ParametricPlot كالآتي :

```
ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]
```

رسم الدالة المعطاة بالصورة البارامترية

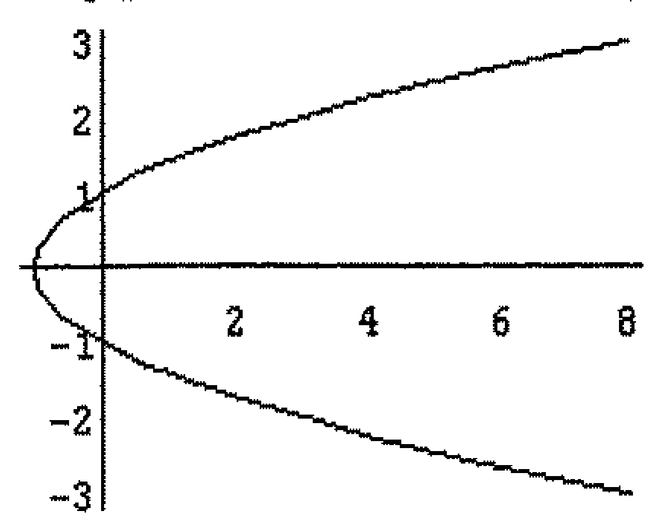
x=fx , y=fy , $tmin \le t \le tmax$

حيث fx , fy دوال في البارامتر t

```
ParametricPlot[{{fx, fy}, {gx, gy}, ...}, {t, tmin, tmax}]
```

رسم اكثر من دالة معطاة بالصورة البارامترية


In[1]:=ParametricPlot[{t^2-1,t},{t,-3,3}]



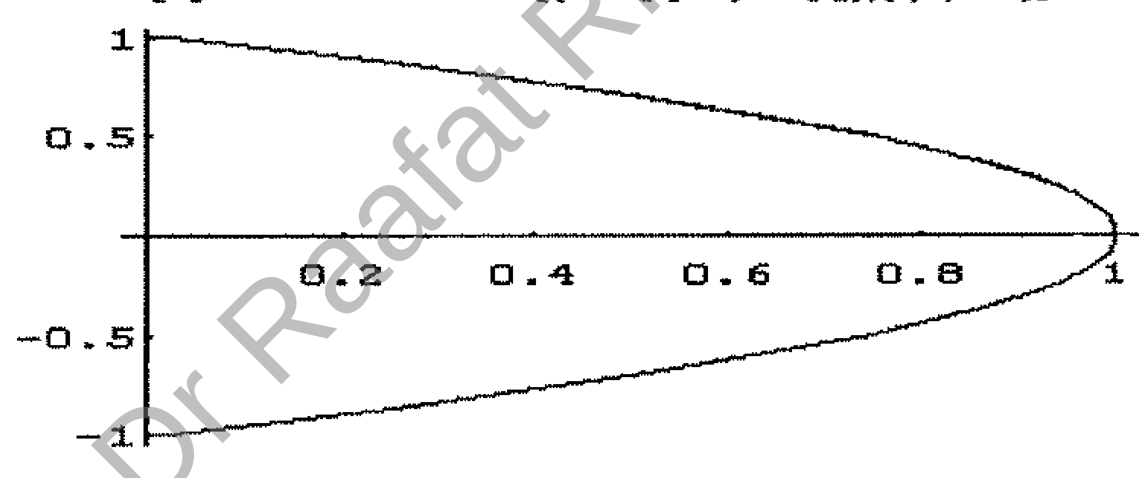
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=t^2-1$, $y=t$, $-3\le t\le 3$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$x^2=x+1$, $-1\le x\le 8$

In[2]:=ParametricPlot[{Cos[t]^2,Sin[t]},{t,0,2Pi}]



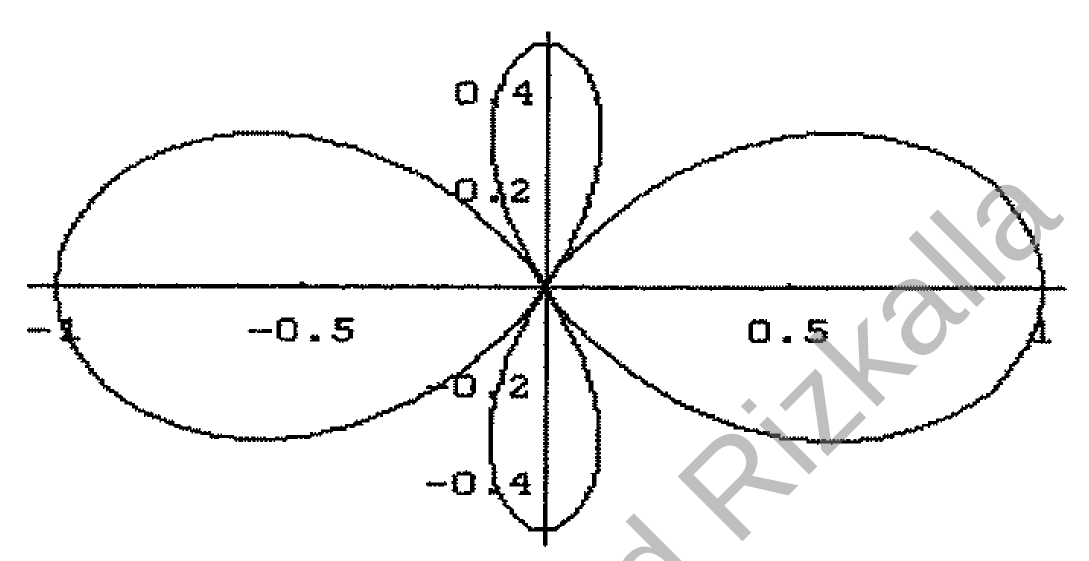
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=\cos^2(t)$, $y=\sin(t)$, $0\le t\le 2\pi$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$y^2=1-x$, $0\le x\le 1$

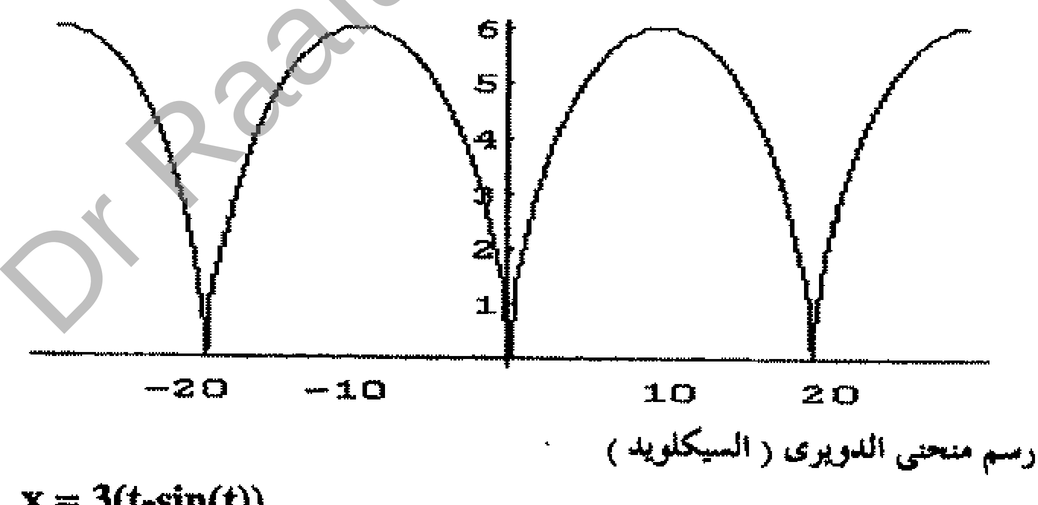
```
In[3]:=r[t_]:=(3Cos[t]^2-1)/2;
       ParametricPlot[{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم المنحنى فى الصورة القطبية

$$r=\frac{3\cos^2(t)-1}{2} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

```
In[4]:=ParametricPlot[{3(t-Sin[t]),3(1-Cos[t])},{t,-3Pi,3Pi}]
```

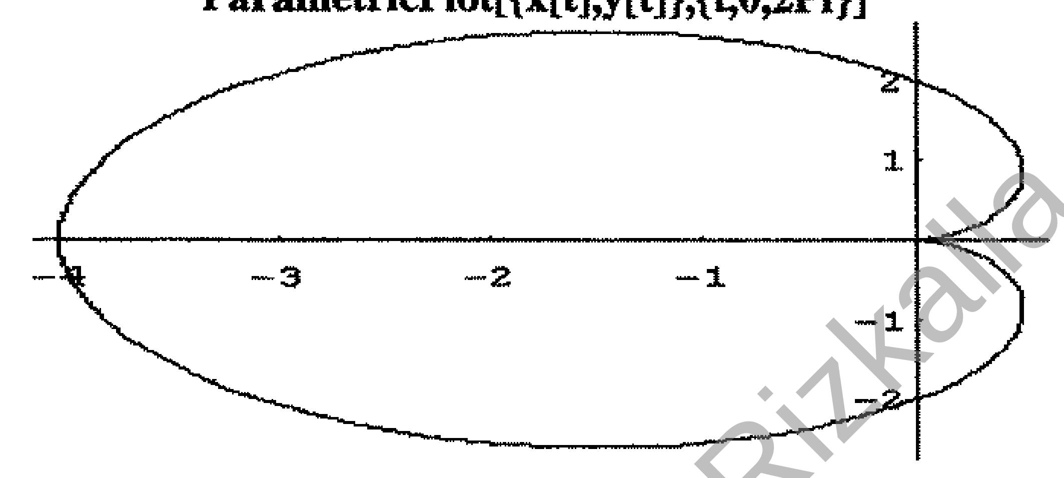


رسم منحنى الدويرى (السيكلويد)

$x = 3(t\text{-}\sin(t))$

$y = 3(1\text{-}\cos(t)) \quad , \quad -3 \le t \le 3$

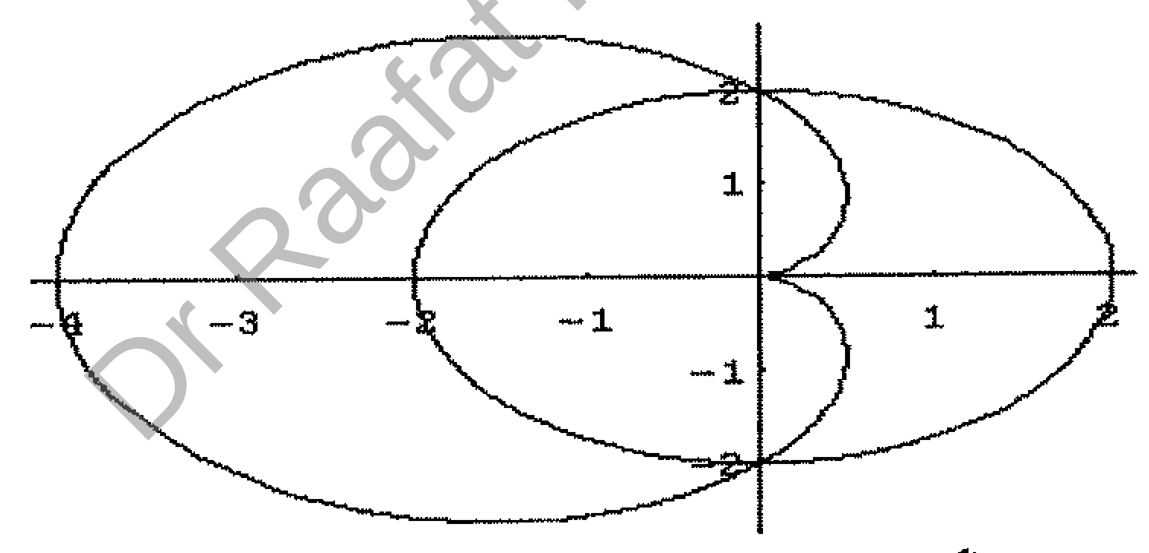
```
In[5]:=x[t_]:=2(Cos[t]-Cos[t]^2);
       y[t_]:=2(Sin[t]-Sin[t] Cos[t]);
       ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد المعطى بالصورة البارامترية

x(t) = 2 cos (t) [1 - cos (t)]
y(t) = 2 sin (t) [1 - cos (t)]

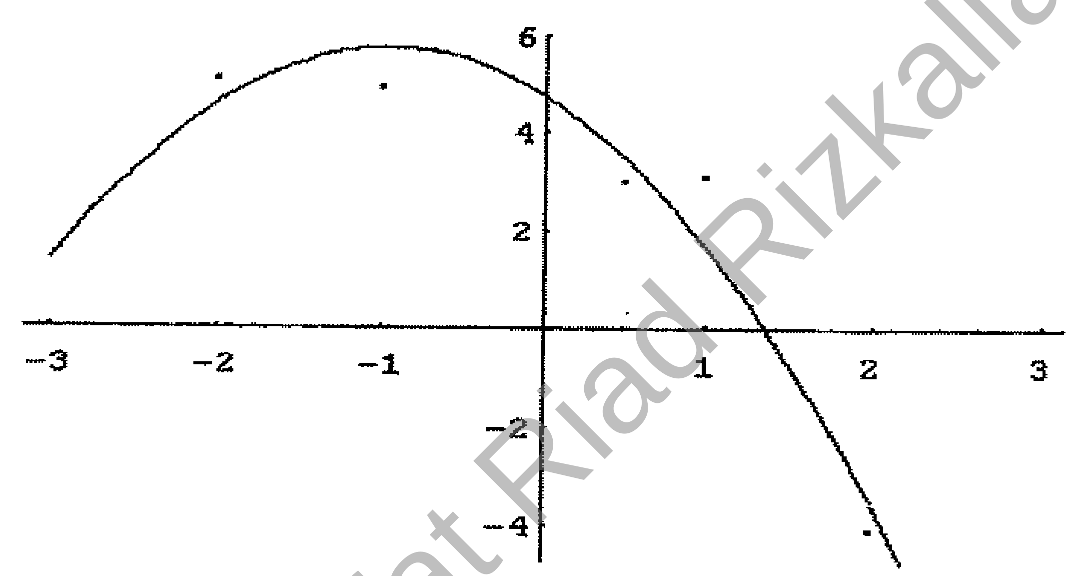
```
In[6]:=ParametricPlot[{{x[t],y[t]},{2Cos[t],2Sin[t]}},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد السابق مع الدائرة المعطاة بالصورة القطبية

x(t) = 2 cos (t)
y(t) = 2 sin (t)

الباب السادس
ماثيماتيكا والتحليل العددى



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الأتية :

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

٢. إيجاد جذر تقريبى **Numerical Root Finding**

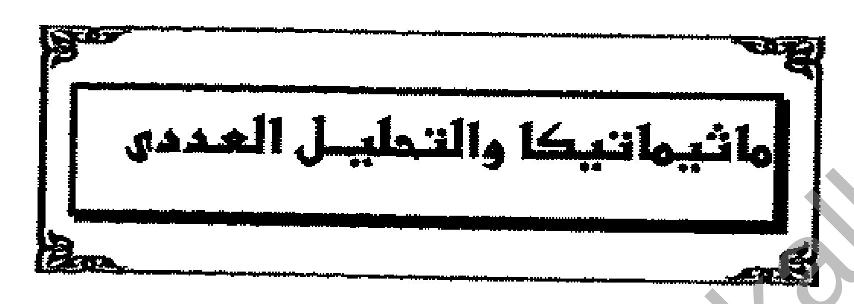
٣. إيجاد القيم الصغرى **Numerical Minimization**

٤. الحســـــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

٥. التكـــامل العـــددى **Numerical Integration**

٦. التقريب بالمربعات الصغرى **Least - squares**

الباب السادس



ماثيماتيكا والتحليل العددى

التحليل العددى **Numerical Analysis** هو أحد فروع الرياضيات التى تعتمد بقوة على التطورات الحديثة فى علم الكومبيوتر وعلى التطبيقات فى استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية المختلفة • ومن اكثر مميزات ماثيماتيكا هو المقدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفى صورة رمزية **Exact Symbolic Results** للحسابات الرياضية المختلفة وفى بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ولمثل هذه الحسابات فإن ماثيماتيكا يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة **N** والتى تستخدم بالصورة

N[expr] أو **expr//N**

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية **expr** والدالة

N[expr,n]

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية **expr** مقربة الى **n** من الأرقام العشرية وفى هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحصول على قيم تقريبية لنتائج العمليات الرياضية فى مجالات مختلفة من التحليل العددى •

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

فى برنامج ماثيماتيكا يمكن حل معادلات كثيرات الحــدود باســتخدام الأمــر Solve كما عرفنا فى الباب الثالث وفى حالة عدم الحصول على حل صريــح للمعادلــة أو مجموعــة المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2 = 0$ والحصول على الجذور

```
In[1]:= Solve[x^2-3x+2==0,x]
Out[1]={{x -> 1}, {x -> 2}}
```

الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[2]  := Solve[x^5+7x+1==0,x]
Out[2] = ToRules[Roots[7 x + x^5 == -1, x]
```

باستخدام الدالة N نحصل على قيمة عاددية تقريبية للحل

```
In[3]  :=N[%]
Out[3] ={{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
         {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
         {x -> -0.142849},
         {x -> 1.1845 - 1.15139 I}, {x -> 1.1845 + 1.15139 I}}
```

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بـــدون الحاجـــة الى إيجاد الحل المضبوط أولا وذلك باستخدام الأمر NRoots كالآتي :

NRoots[poly= = 0 ,x]	للحصول على حـــــل عددى تقريبي لمعـــــادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنسبة الى المتغير x
NRoots[poly= = 0,x,n]	للحصول على حـــل عددى تقريبي لمعـــــادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنســـبة الى المتغير x وبدقة n رقم عشرى

للحصول على حل عددى تقريبي لمعادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x]
Out[4]=
    x = = -1.11308 - 1.15173 I ||
    x = = -1.11308 + 1.15173 I || x = = -0.142849 ||
    x = = 1.1845 - 1.15139 I || x = = 1.1845 + 1.15139 I
```

لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال In[4] فى صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

```
In[5]:=ToRules[%]
Out[5]=
    Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
             {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
             {x -> -0.142849},
             {x -> 1.1845 - 1.15139 I},
             {x -> 1.1845 + 1.15139 I}]
```

٢. إيجاد جذر تقريبى Numerical Root Finding

الأمر **NRoots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية ...) يكون اكثر صعوبة ، وبرنامج ماثيماتيكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو لمجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية x_0 وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** فى إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ مبتدئا من نقطة البداية x_0 وبمعلومية قيمة المشتقة $f'(x)$ يتم الحصول على متتابعة من القيم x_n حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة اكثر من جذر ، ومتتابعة القيم x_n تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0 , 1 , \ldots$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة $f'(x)$ بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

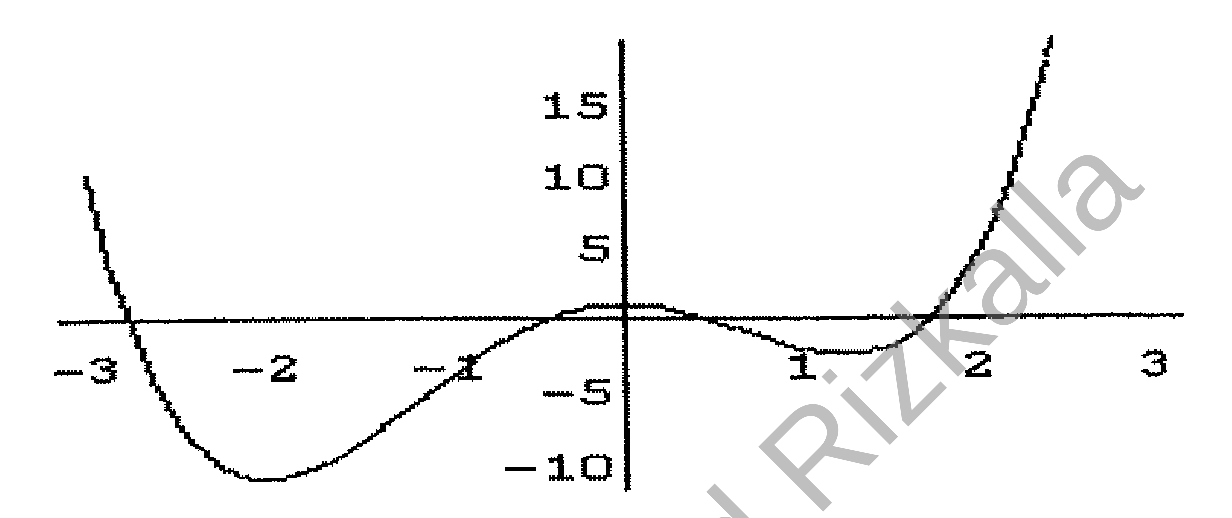
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) \qquad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

حيث x_1 , x_0 قيم ابتدائية يتم تحديدها .

وفي الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر **FindRoot**

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من النقطة $x = x_0$	**FindRoot[lhs= =rhs,{x,x0}]**
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من النقطة **x = xstart** وبحيث يتم البحث داخل النطاق من **x = xmin** الى **x = xmax** ويتـــم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار	**FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]**
البحث عن جذر للمعادلة **lhs= =rhs** مبتدئا من القيـــم الابتدائية x_1 , x_0 باستخدام طريقة القاطع	**FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]**
البـــحث عن جذر لمجموعة المعـــادلات **eqn1 , eqn2 , ...** في وقت واحد مبتدئا من نقط البداية x_0 , y_0 , ...	**FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]**

In[1]:=f[x_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة f(x) وهي كثيرة حـــدود من الدرجــــة الرابـــعة ثم رســـــم الدالـــة فى الفترة (-3,3)

In[2]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,-2.5}]
Out[2]={x -> -2.76251}

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=-2.5

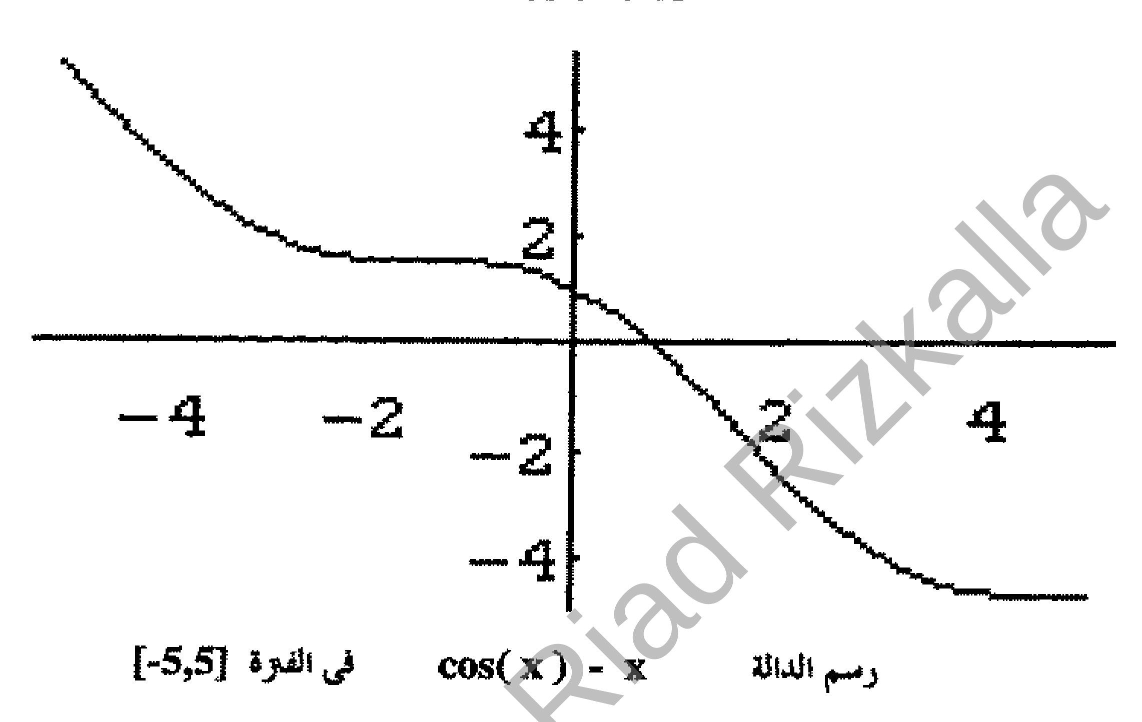
In[3]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,0.1}]
Out[3]={x -> 0.483179}

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=0.1

In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]
Out[4]={x -> 1.71594}

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x = 2

In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]



رسم الدالة **cos(x) - x** فى الفترة **[-5,5]**

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة **cos x=x** بالقرب من **x=0**

In[6]:=FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]
Out[6]={x -> 0.739085}

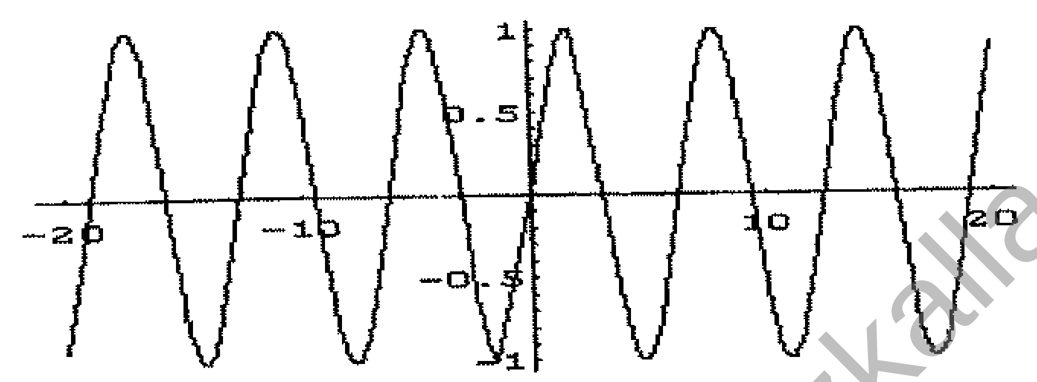
للحصول على جذر عددى تقريبى للمعادلة مبتدئا من نقط البداية $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

In[7]:=FindRoot[Cos[x]= =x,{x,{0,1}}]
Out[7]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددى تقريبى للمعادلة $x^2 - 1 = 0$ بالقرب من نقطة بداية يتم اختيارها عشوائيا داخل الفترة **(0,1)**

In[8]:=FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]
Out[8]={x -> 1.}

In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة sin(x) يقطع محور x في عدد لانهائي من النقط

$x = n\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

للحصول على جـذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 0 بالقرب من نقطة البداية x=3

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]
Out[10]={x -> 3.14159}

المعادلة sin x = 2 ليس لها حل حقيقي ولكن لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بأن طريقة نيوتن لا تقترب من الجذر

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]
Out[11]=FindRoot::cvnwt:
Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

للحصول على جـذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 2 بالقرب من نقطة البداية x=I

In[12]:=FindRoot[Sin[x]= =2,{x,I}]
Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

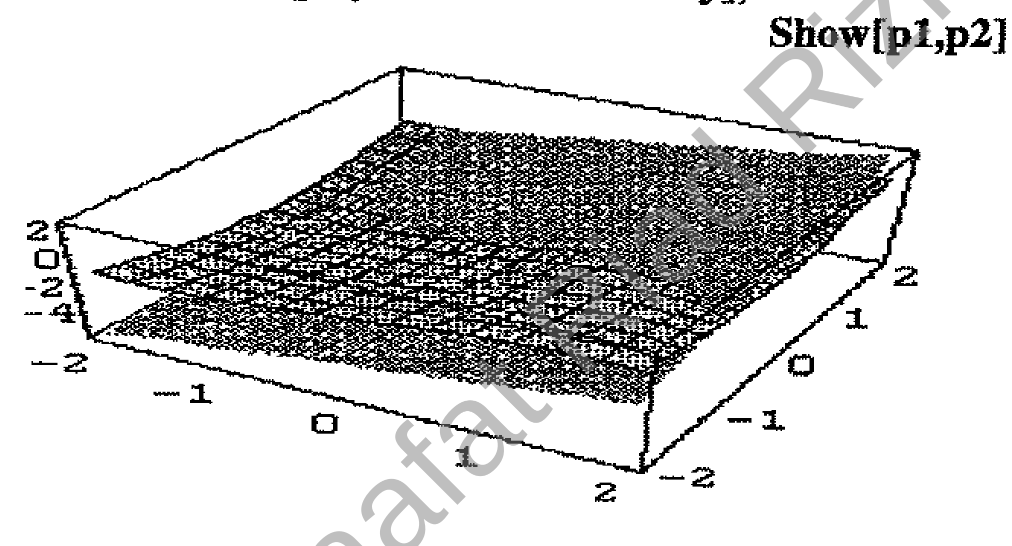
الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 0 بالقرب من نقطة البداية x=3 وداخل الفترة [2.5,3.5] فقط ونلاحظ في هذا المثال انه يوجد جذر في هذه الفترة

In[13]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,3,2.5,3.5}]
Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة **FindRoot** تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة **sin x = 0** مبتدئا من النقطة **x=1** وداخل الفترة **[0.5,1.5]** فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه لا يوجد جذر فى هذه الفترة

```
In[14]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,1,0.5,1.5}]
Out[14]=FindRoot::regex:
Reached the point {-0.557408}
which is outsidethe region {{0.5, 1.5}}.
{x -> -0.557408}
```

```
In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},
DisplayFunction->Identity];
p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,
          DisplayFunction->Identity];
                                    Show[p1,p2]
```



فى هذا المثال تم استعراض رسم الدالة sin (x) - cos(x) وتخطيط السطح الناتج بخطوط شبكية مع رسم الدالة x + y - 1 بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا فى شـــكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين . ولإيجاد حـــل عددى تقريبى للمعادلتين معا فى آن واحد مبتدئا من نقط البداية y = 0.2 , x = 0.1

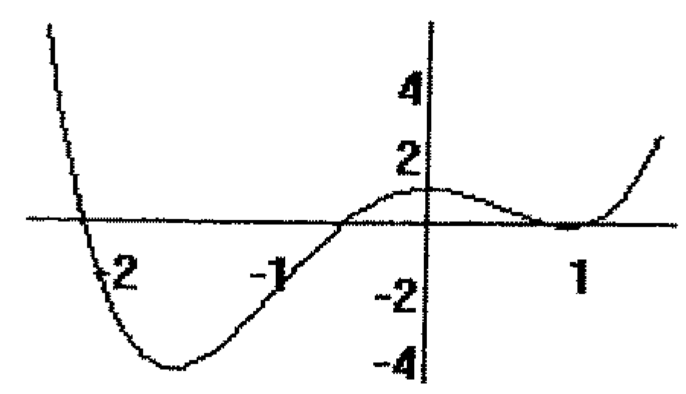
```
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]
Out[16]={x -> 1.2854, y -> -0.285398}
```

٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

فى برنامج ماثيماتيكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقــط تنعــدم عندها الدالة وفى بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالــة **f(x)** اصغر ما يمكن أي إيجاد نقط نهايــات صغرى محليــة **local minimum** للدالــة **f(x)** ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشــتقة الدالــة **f(x)** ، وماثيماتيكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالــة **f(x)** بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هــذه النقــط وباســتخدام العلاقــة **max(f) = - min(-f)** يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة **f(x)** .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
FindMinimum[f,{x,x0}]	البحث عن نقطة نهاية صغــرى محليــة للدالــة f بالقرب من نقطة البدايــة x_0 وحســاب القيمــة الصغرى للدالة.
FindMinimum[f,{x,xstart,xmin, xmax}]	البحث عن نقطة نهاية صغــرى محليــة للدالــة f بالقرب من نقطة البداية x=xstart وبحيث يتم البحث فقط داخل النطاق مــن x=xmin الى x=xmax وحساب القيمة الصغرى للدالة .
FindMinimum[f,{x,{x0,x1}}]	البحث عن نقطة نهاية صغــرى محليــة للدالــة f بالقرب من القيم الابتدائية x_0 , x_1 وحســـاب القيمــة الصغــرى للدالــة ويســتخدم الأمــر FindMinimum بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة f
FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية لدالة فى اكثر من متغير f(x , y , ...) بــالقرب مــن القيــم الابتدائيــــة $x=x_0$, $y=y_0$, ... وحساب القيمة الصغرى للدالة .

In[1]:= f[x_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]



تعريف الدالة

$f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$

ثم رسمها فى الفترة [-2.5,1.5]

ونلاحظ أن الدالـــــة لها نقطتى نهاية صغرى محلية فى نطاق التعريف

In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[2]={-4.24791, {x -> -1.65587}} النقطة x = -2 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

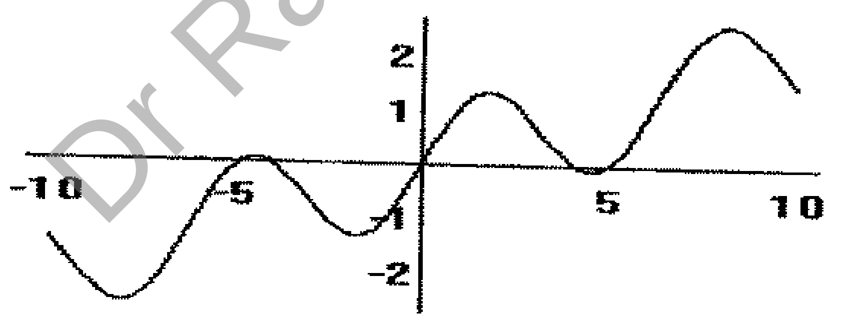
In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[3]={-0.0450589, {x -> 0.905869}} النقطة x = 1 اد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,.5}] للبحث عن نقطةنهاية عظمى محلية للدالة بالقرب

Out[4]= {1. , { - { x->9.54982 10^{-13} }} من النقطة x = .5 إيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]



رسم الدالة

sin x + x/5

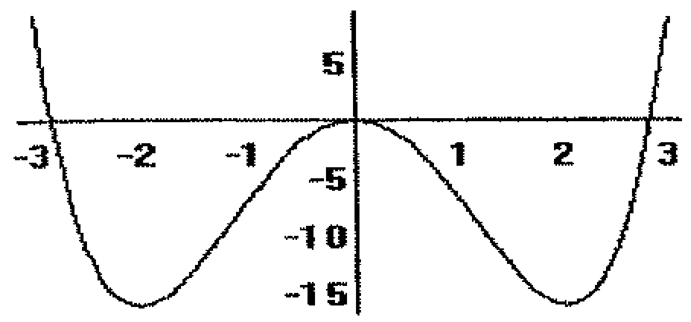
على الفترة [-10,10]

ونلاحظ أن الدالة لها أكثر من نقطة نهاية صغرىمحلية فى نطاق التعريف .

In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب

Out[6]={-1.33423, {x -> -1.77215}} من النقطة x = 1 جاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[7]:= r3[x_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$$r3(x) = x^4 - 8x^2$$

ثم رسمها في الفـــــترة [-3 , 3]

ونلاحظ أن الدالة لها نقطتين نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}]

Out[8]={-16., {x -> 2.}}

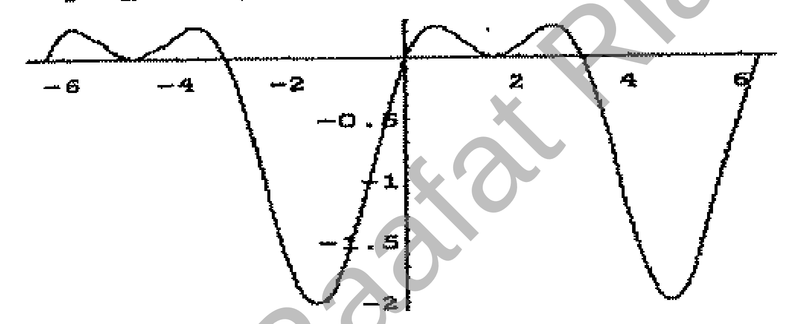
للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = 1.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}]

Out[9]={-16., {x ->- 2.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالــة بالقرب من النقطة x = -1 وفي النطاق [-2.5,0] وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[10]:= r4[x_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$$

ثم رسمها في الفـــترة $[-2\pi, 2\pi]$

ونلاحظ أن الدالة لها أكثر من نقطة نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}]

Out[11]={-2., {x -> 4.71239}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة r4[x] بالقرب من النقطة x = 6 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}]

Out[12]={-2., {x -> -1.5708}}

للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالة r4[x] بالقرب من النقطة x = -3 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}]

Out[13]={2.22045 10^{-16}, {x -> -4.71239}}

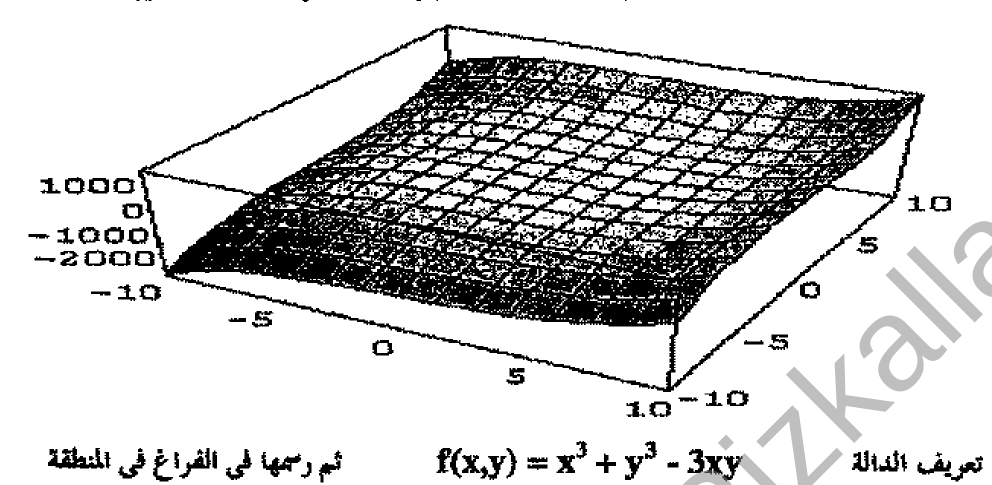
للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالة r4[x] بالقرب من النقطة x = -4 وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها

In[14]:=- FindMinimum[-r4[x],{x,-4}]

Out[14]={0.25, {-(x -> -3.66519)}}

للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالة r4[x] بالقرب من النقطة x = -4 وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها


In[15]:= f[x_,y_]:=x^3+y^3-3x y; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



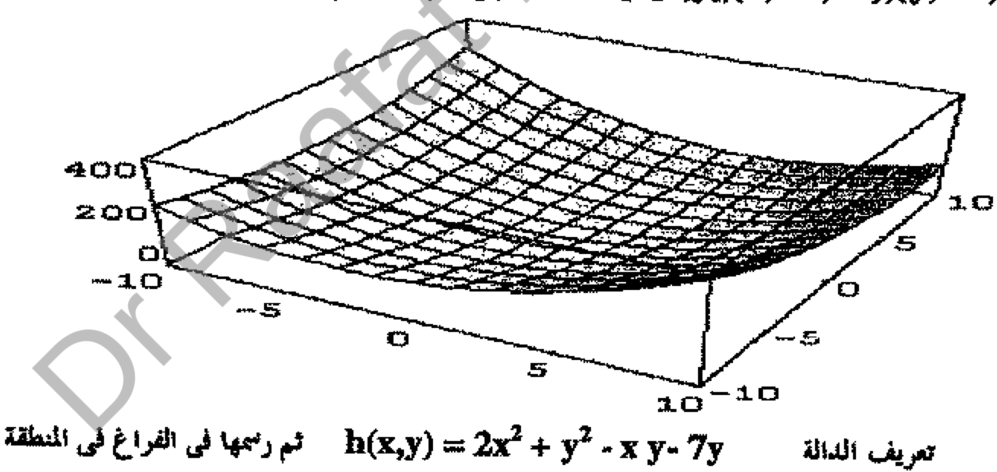
تعريف الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة

$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$

In[16]:=FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}]
Out[16]={-1., {x -> 1., y -> 1.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من x=0.4 , y=0.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[17]:=h[x_,y_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



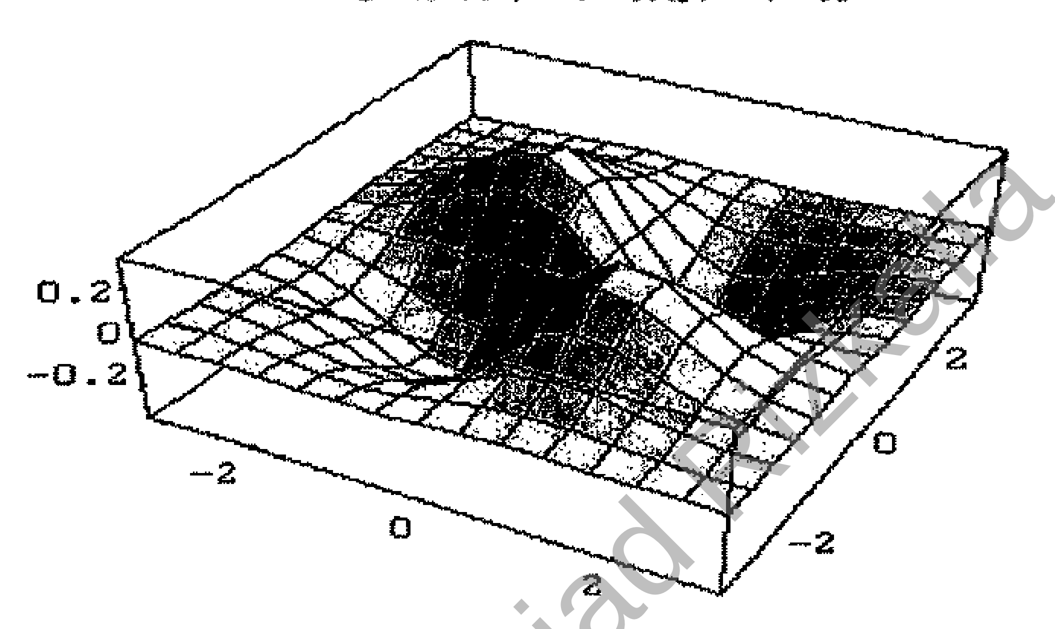
تعريف الدالة $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - x\,y - 7y$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة

$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$

In[18]:=FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]
Out[18]={-14., {x -> 1., y -> 4.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من x=0.4 , y=0.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[19]:= g[x_,y_]:=-x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]



تعريف الدالة $g(x,y) = -x\,y\,Exp[-(x^2 + y^2)/2]$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة

$$-\pi \le x \le \pi \quad , \quad -\pi \le y \le \pi$$

In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من(0.6,0.5)وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها
Out[20]={-0.367879, {x -> 1., y -> 1.}}

In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةصغرى محليةللدالةبالقرب من (-1.5,-0.5) وإيجادالقيمةالصغرى للدالة عندها
Out[21]={-0.367879, {x -> -1., y ->-1.}}

In[22]:=-FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةبالقرب من(-1.5,0.5)وإيجادالقيمةالعظمى للدالةعندها
Out[22]={0.367879, {-(x -> -1.), -(y -> 1.)}}

In[23]:= -FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةبالقرب من(1.5,-0.5)وإيجادالقيمةالعظمى للدالةعندها
Out[23]={0.367879, {-(x -> 1.), -(y ->-1.)}}

٤. الحســـــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

فى برنامج ماثيماتيكا أمر المجموع Sum[f, {i, imin,imax}] يقوم بحساب قيمــة مضبوطة للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$ حتى إذا كان المجموع فى صورة رمزية symbolic وفى بعض الحالات لا يستطيع ماثيماتيكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالــة Sum خاصــة إذا كان ∞ = imax ولمثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجمـــوع باستخدام الدالة N بالصورة

N[Sum[f, {i, imin,imax}] أو فى الصورة Sum[f,{i,imin,imax}]//N

وماثيماتيكا يقدم الأمر NSum لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة والتى تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد فى ماثيماتيكا الأمر NProduct لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{i\,max} f$	NSum[f, {i, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$	NSum[f, {i, imin, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$ من i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step	NSum[f, {i,imin, imax, step}]
إيجادقيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} \sum_{j=j\,min}^{j\,max} f$	NSum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, ...]
إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$	NProduct[f, {i, imin, imax}]

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}]

Out[1]=Sum[i^{-3} , {i, 1, Infinity}]

وعنـــد تطبيق الدالة N أمكن الحصول على قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]//N

Out[2]=1.20206

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}]

Out[3]=1.20206

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باســتخدام دالة Sum بالرغم من أن imax = 5 فقط

In[4]:=Sum[Exp[-n],{n,0,5}]

Out[4]=1 + E^{-5} + E^{-4} + E^{-3} + E^{-2} + E^{-1}

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عدديــة تقريبية للمجموع حتى مالانهاية

In[5]:=NSum[Exp[-n],{n,0,Infinity}]

Out[5]=1.58198

In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]

Out[6]=2.71828

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]

Out[7]=0.25

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]

Out[8]=2.39932

لإيجاد قيمةعددية تقريبيةلمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10} \frac{1}{i^2+j^2}$

In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]

Out[9]=0.0000694444

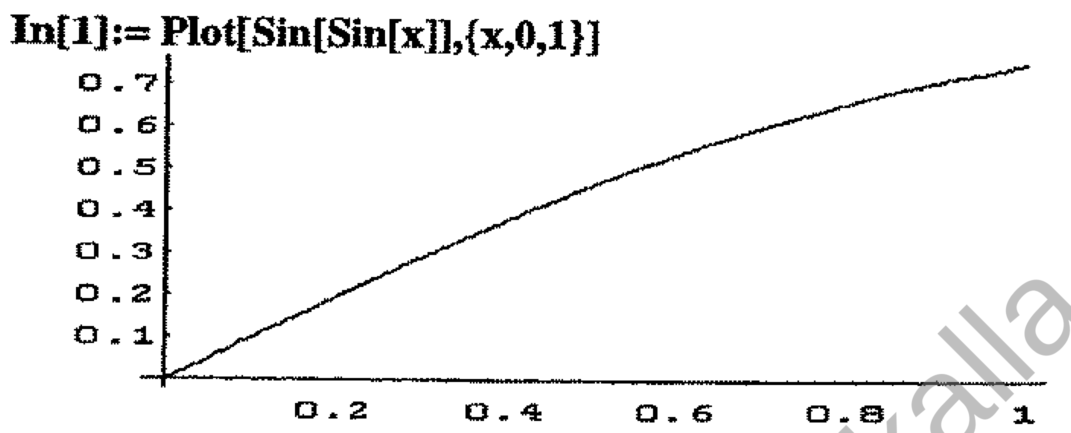
لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$

٥ . التكـــامل العـــددى Numerical Integration

دالة التكامل **Integrate** تقوم بحساب التكامل $\int f(x)\,dx$ بصورة رمزية **symbolic** حيث يتعامل برنامج ماثيماتيكا مع دالة التكامل **f(x)** ويقوم بإجراء متتابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولا الى القيمة المضبوطة للتكامل فى صورة رمزية وتوجـــد بعض الدوال لا تستطيع دالة **Integrate** الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحـــددة **definite** وفى هذه الحالة يمكن استخدام الدالة **N** لحساب قيمة عددية للتكامل . وفـــى ماثيماتيكا يوجد الدالة **NIntegrate** لحساب قيمة عددية تقريبية للتكـــامل مباشـــرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متتابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقط خاصة فى نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم فى الوصول الى قيمة عددية تقريبية جيـــدة للتكامل .

N[Integrate[f,{x,xmin,xmax}]]	لحساب قيمة مضبوطة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ أولا ثم ايجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]	لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},...]	لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد $\int_{xmin}^{xmax}\int_{ymin}^{ymax} f(x,y)\,dx\,dy$
NIntegrate[f,{x,xmin,x1,x2,...,xmax}]	حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ مع مراعاة النقط الشاذة x1,x2,...., لدالة التكامل

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



In[2]:=Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

csa not found

ماثيماتيكا لا يستطيع الحصول على قيمة مضبوطة للتكامل

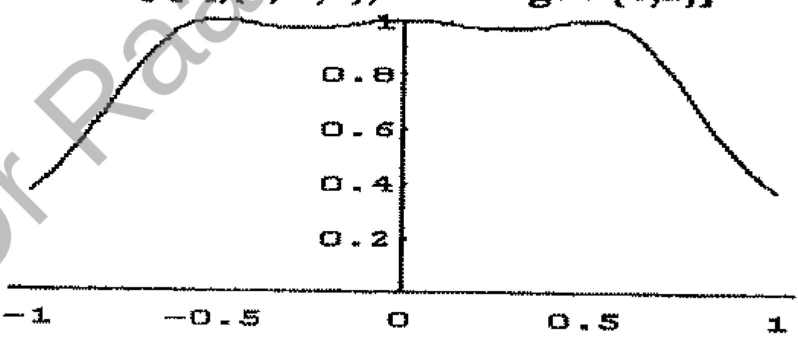
$$\int_0^1 \sin(\sin(x))\,dx$$

In[3]:=N[%]

Out[3]=0.430606

بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

In[4]:=f[x_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];
Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

Out[5]=1.71167

لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2 \cos^2(\pi x)}\,dx$$

In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

Out[6]=0.5

In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{3} \sqrt{4+x^3}\, dx$$

Out[7]=9.27972

In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}]

لإيجادقيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+\pi}\, dx$$

Out[8]=0.433785

In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_0^{2} e^{-x^2}\, dx$$

Out[9]=0.882081

In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)\, dx$$

Out[10]=1.80905

In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}]

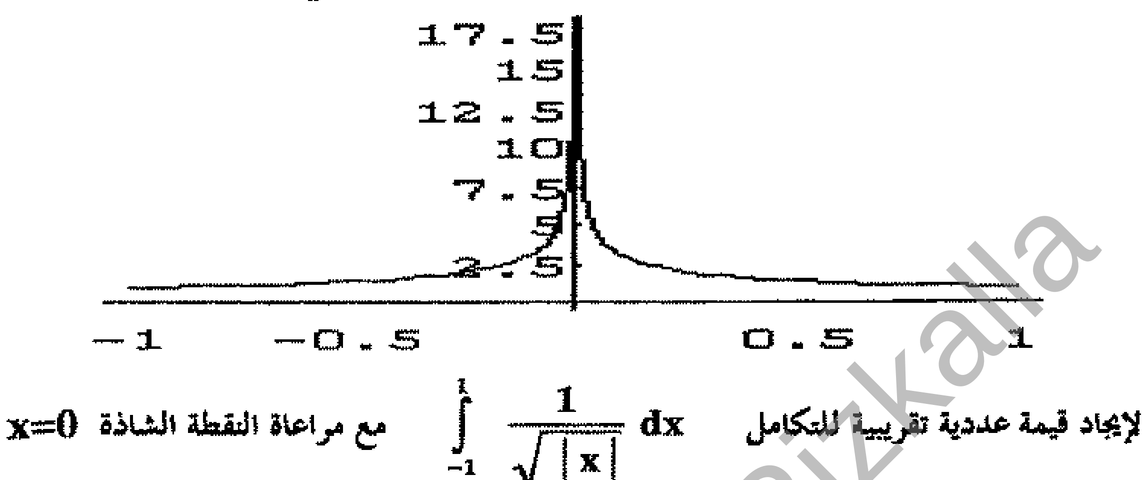
لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx$$

مع مراعاة النقطة الشاذة x=1

Out[11]=3.06006 - 2.70211 I

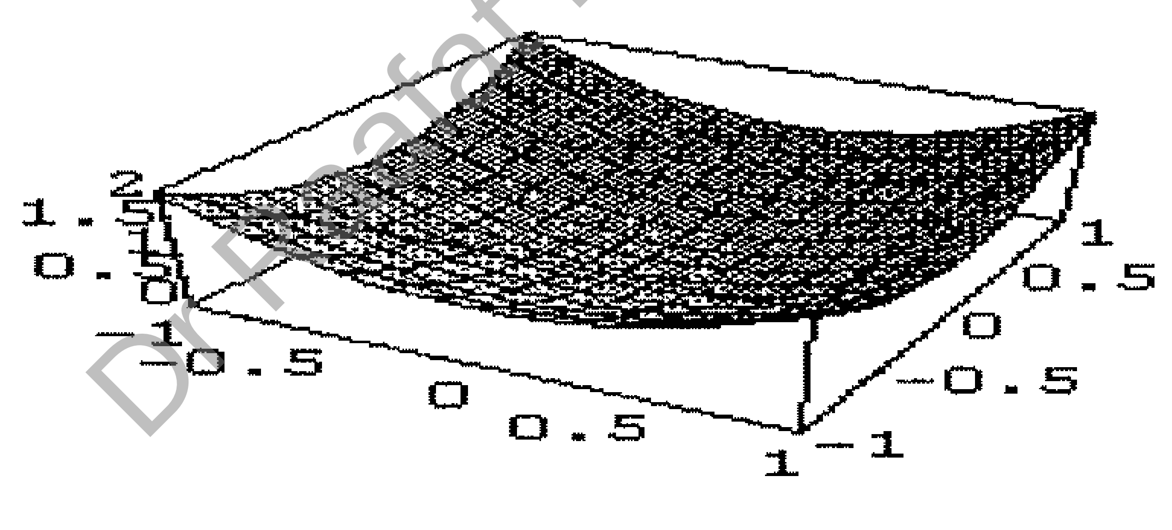
In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ مع مراعاة النقطة الشاذة $x=0$

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]
Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائى $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]
Out[15]=2.66667

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3} e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}}\,dx\,dy$$

In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]
Out[16]=2.48738

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} \left(2x^2+y^2\right)dy\,dx$$

In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]
Out[17]=0.135714

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y+z} x\,y\,z\;dx\,dy\,dz$$

In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]
Out[18]=0.118056

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;dz\,dx\,dy$$

In[19]:=NIntegrate[zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},
{z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}]

Out[19]=38.1704

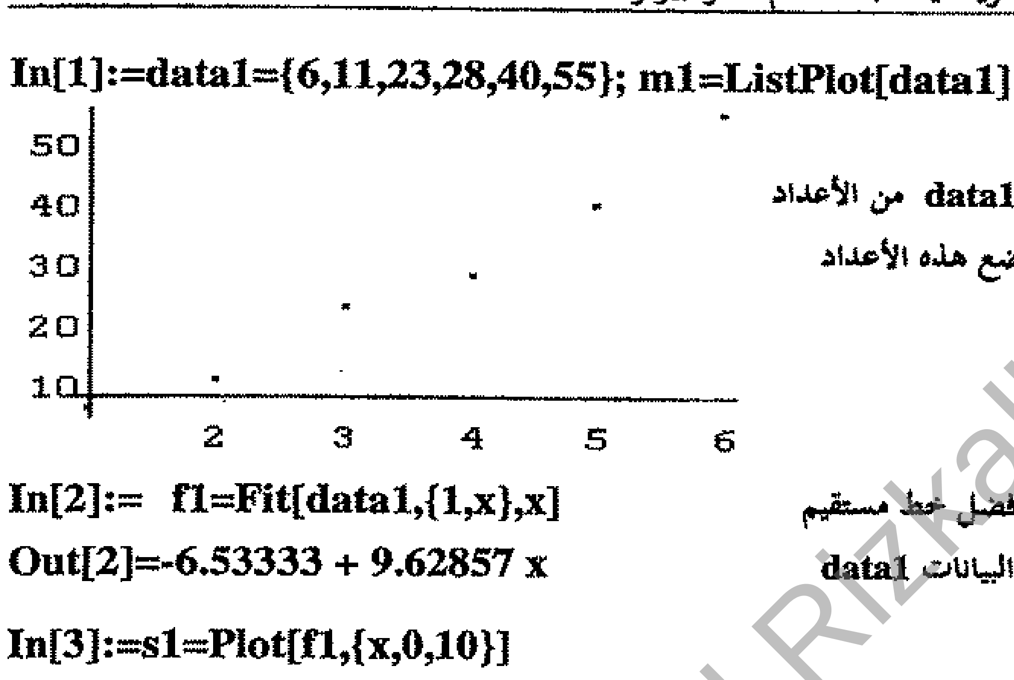
٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

فى داخل بناء ماثيماتيكا **built-in** يوجد إمكانات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التى تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التى يعتمد عليهـا ماثيماتيكـا لملائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التى نقوم بتحديدها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية مـن هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار $\sum_i |y_i - f_i|^2$ اصغر ما يمكن حيث y_i من البيانات المعطاة , f_i هى القيمة من التركيبة الخطية للدوال التى قام المستخدم بتحديدها ويتم ذلك باستخدام الدالة **Fit** والصيغة العامة لها كالآتي :

Fit[data,funs,vars]	ملائمة البيانات **data** باستخدام تركيبة خطية من الدوال **funs** فى المتغيرات **vars**
Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضـل تركيـبة خطيـة من الدوال **f1 , f2,...** تلائم النقط **(1,y1),(2,y2),...** حيث تم اعتبار قيم **x** المناظرة لقيم **yi** هى **xi = i**
Fit[{{x1,y1},{x2,y2},...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضـل تركيـبة خطيـة من الدوال **f1,f2,...** تلائم النقط **(x1,y1),(x2,y2),...**

Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]	إيجاد افضل خط مسـتقيم **linear fit** يلائم البيانات **(1,y1),(2,y2), ...**
Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]	إيجاد افضل كثيرة حـدود من الدرجـة الثـانية **Quadratic fit** تلائم البيانات **(1,y1),(2,y2), ...**
Fit[data,Table[x^i,{i,0,n}],x],x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة **n** تلائم البيانات **data**

```
In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]
```

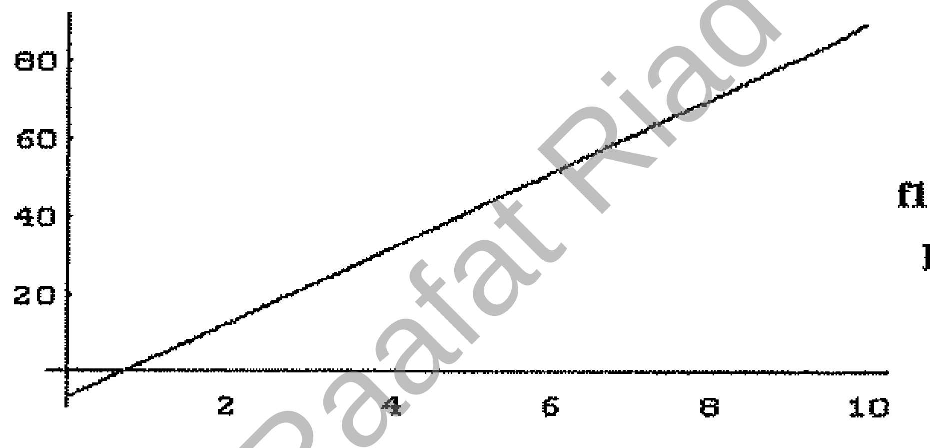


تعريف قائمة data1 من الأعداد
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد
في المستوى

```
In[2]:=   f1=Fit[data1,{1,x},x]
Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x
```

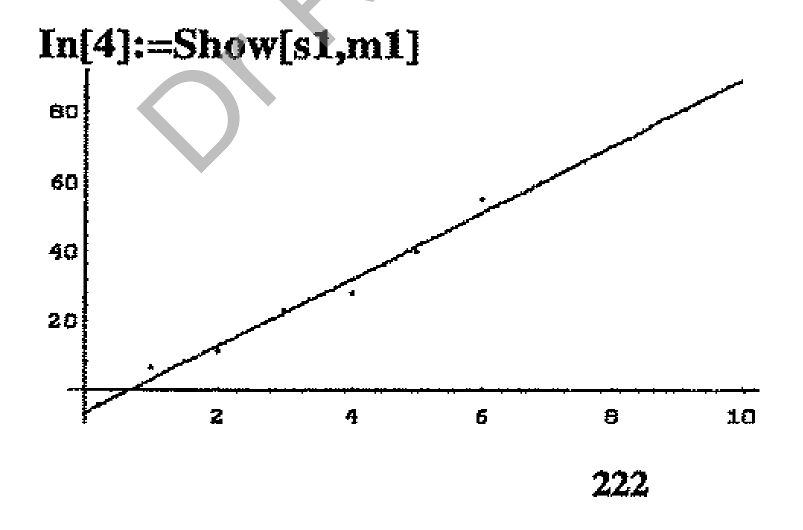
إيجاد معادلة افضل خط مستقيم
يلائم قائمة البيانات data1

```
In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]
```



رسم الخط المستقيم f1
الناتج من الدالة Fit

```
In[4]:=Show[s1,m1]
```

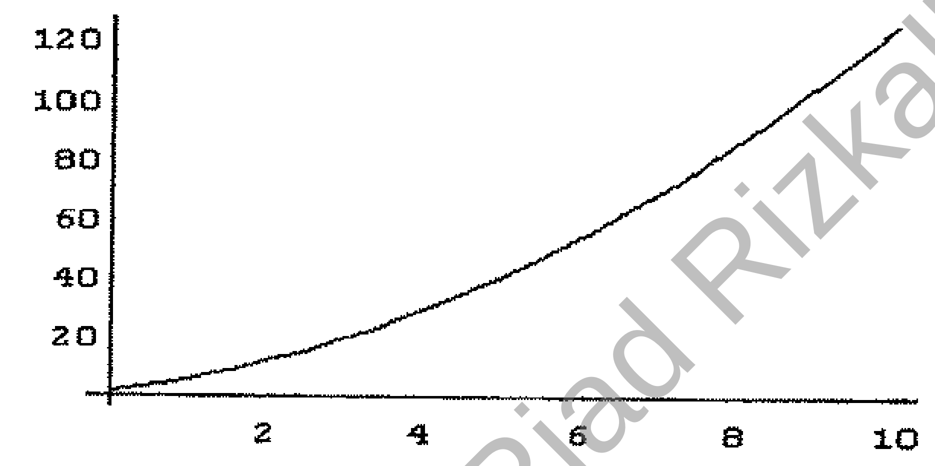


إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

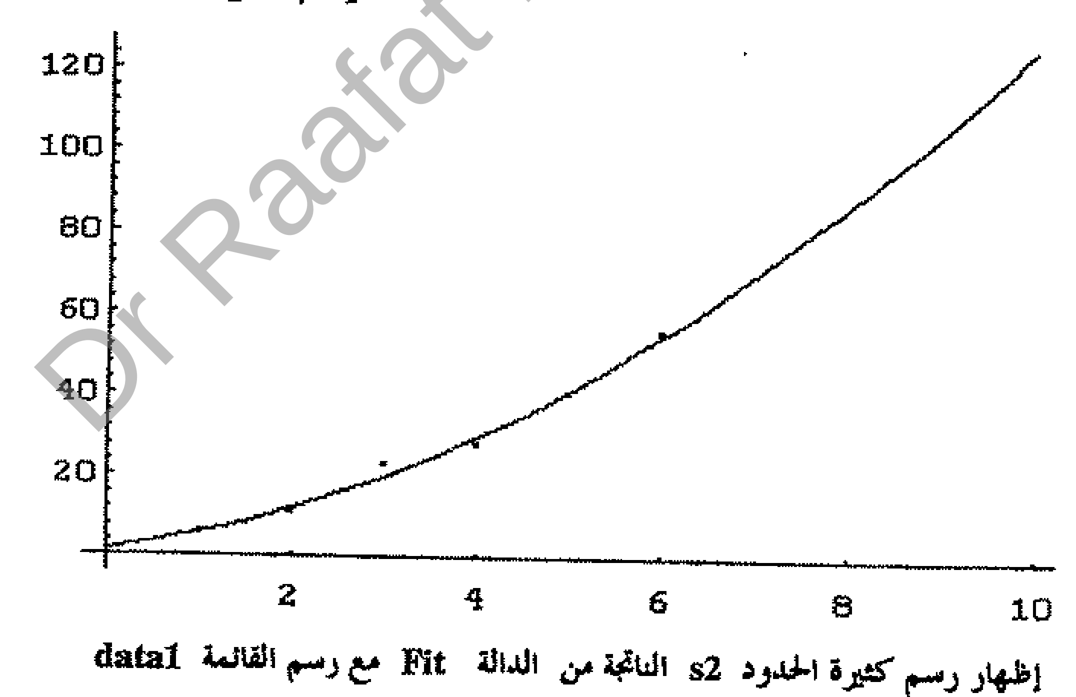
In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x] إيجاد أفضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data1**

Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x^2

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}] رســـــم كثيرة الحدود **f2** الناتجـة من الدالة **Fit**



In[7]:= Show[m1,s2]

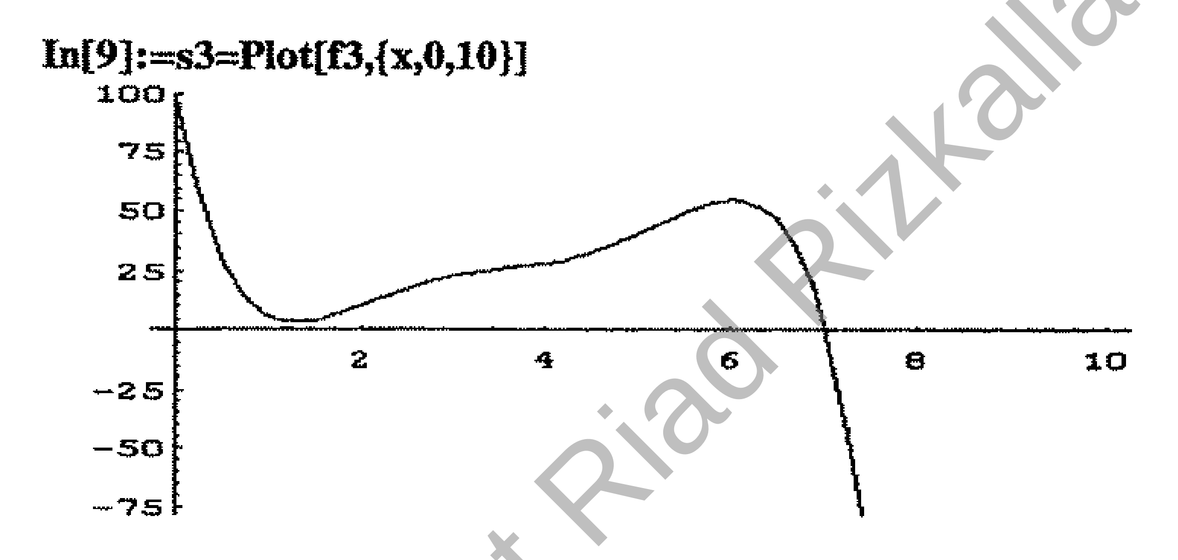


إظهار رسم كثيرة الحدود **s2** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**

إيجاد الفضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات **data1** ثم رسم كثيرة الحدود **f3** الناتجة من الدالة **Fit**

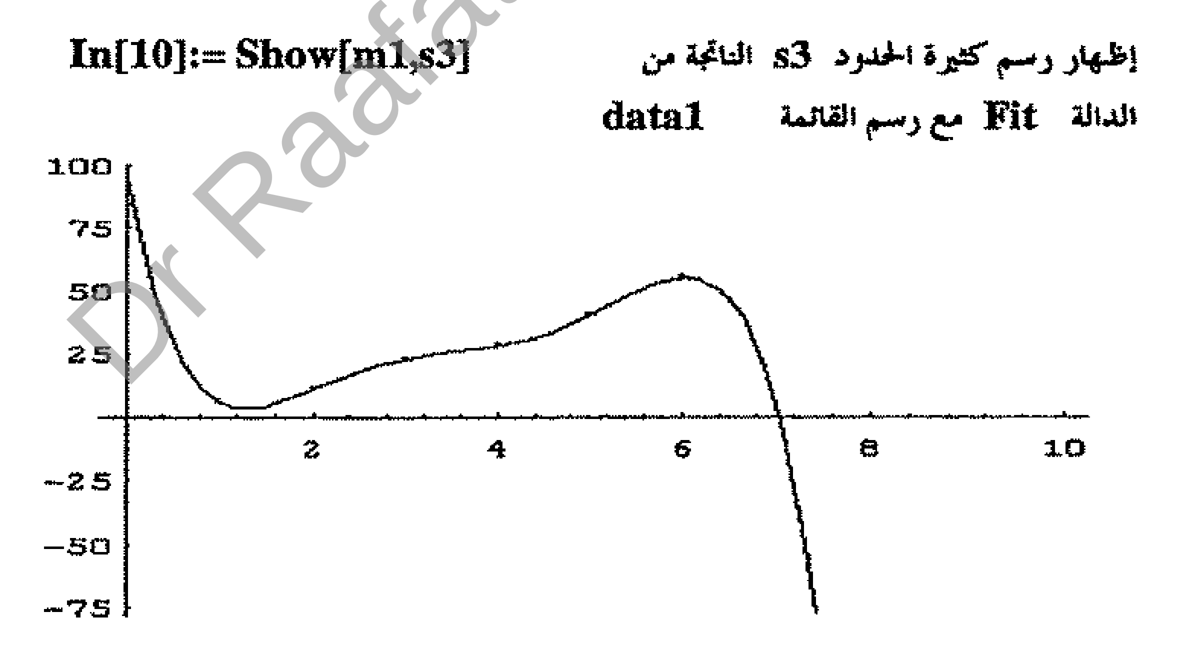
In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]
Out[8]= $96. - 194.533\,x + 144.583\,x^2 - 46.5833\,x^3 + 6.91667\,x^4 - 0.383333\,x^5$

In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]



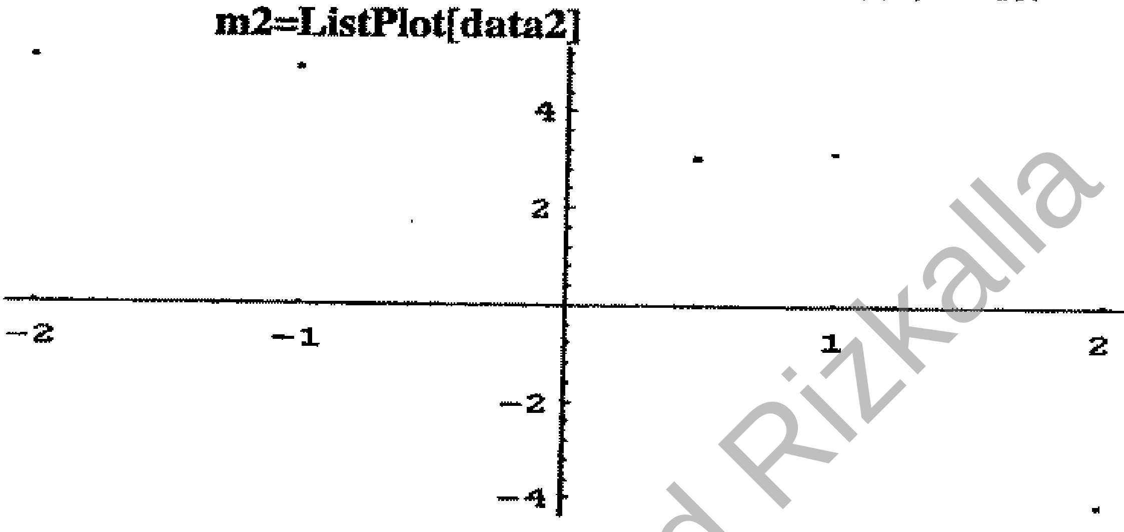
In[10]:= Show[m1,s3]

إظهار رسم كثيرة الحدود **s3** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**



تعريف قائمة **data2** من الأعداد ثم تحـــديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

```
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
         m2=ListPlot[data2]
```

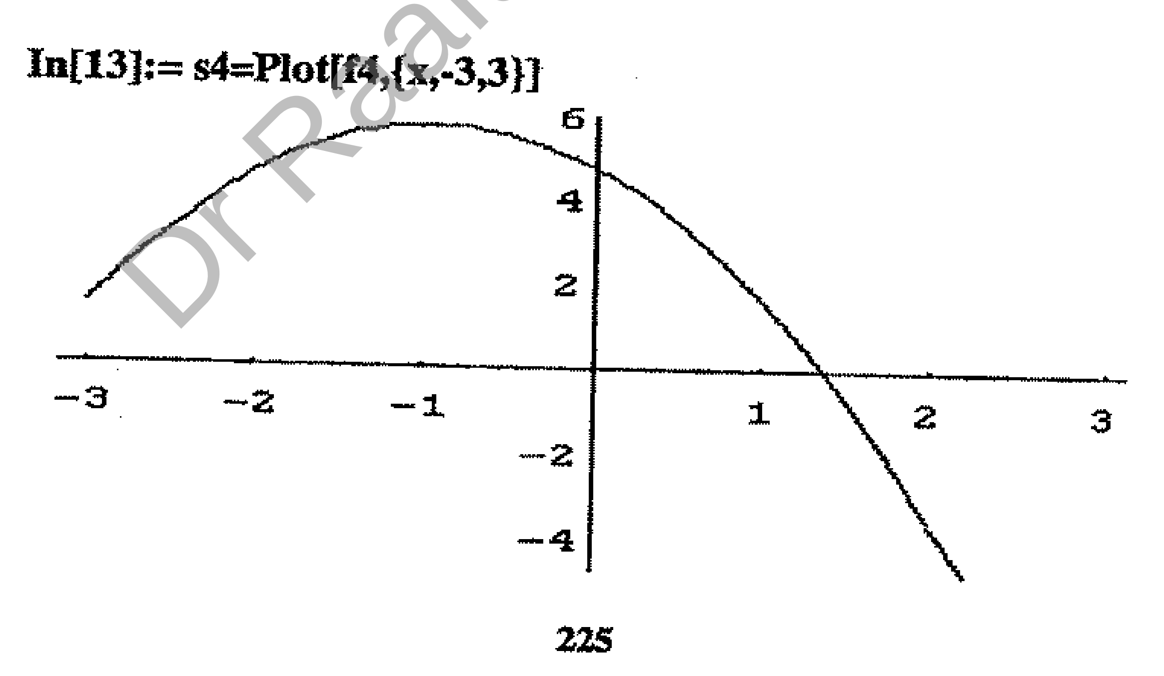


إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data2** ثم رســم كثـــيرة الحدود **f4** الناتجـــة من الدالة **Fit**

```
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
```

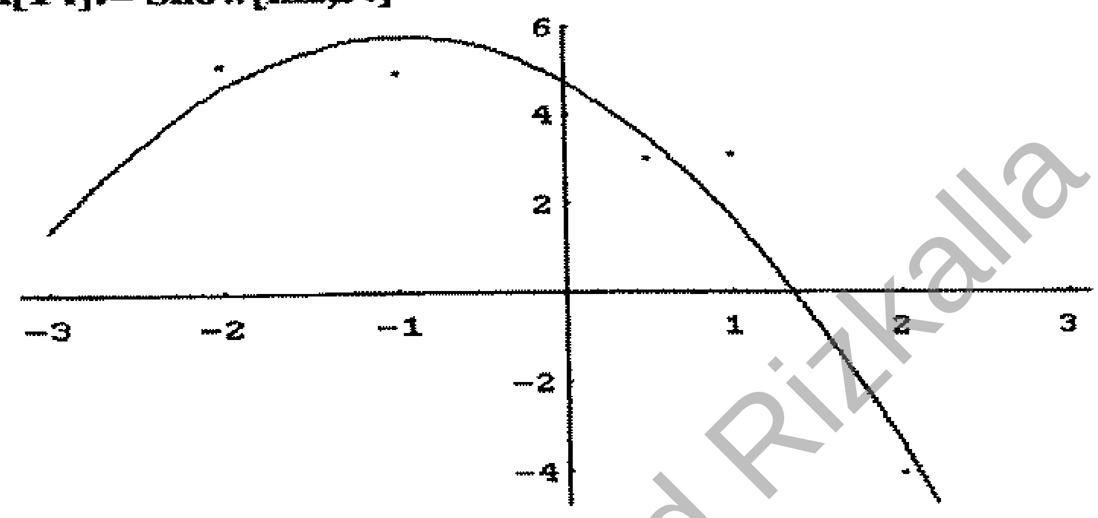
Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2

```
In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]
```



إظهار رسم كثيرة الحدود s4 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data2

In[14]:= Show[m2,s4]

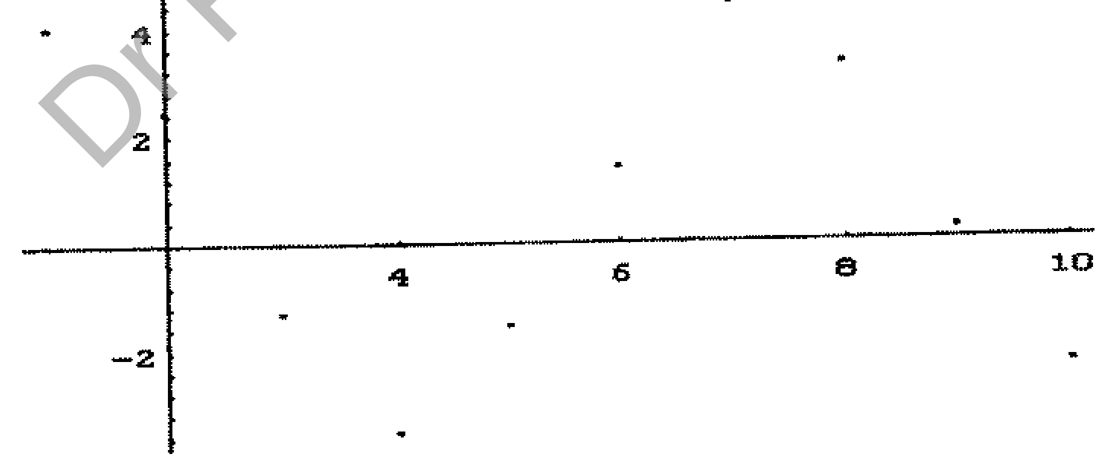


وتعتبر كثيرات الحدود هي الأكثر استخداما مع دالة Fit ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى في قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة data3 من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

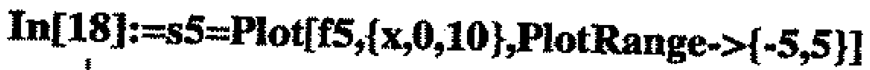
In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]
Out[15]={4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028, 1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}

In[16]:=m3=ListPlot[data3]

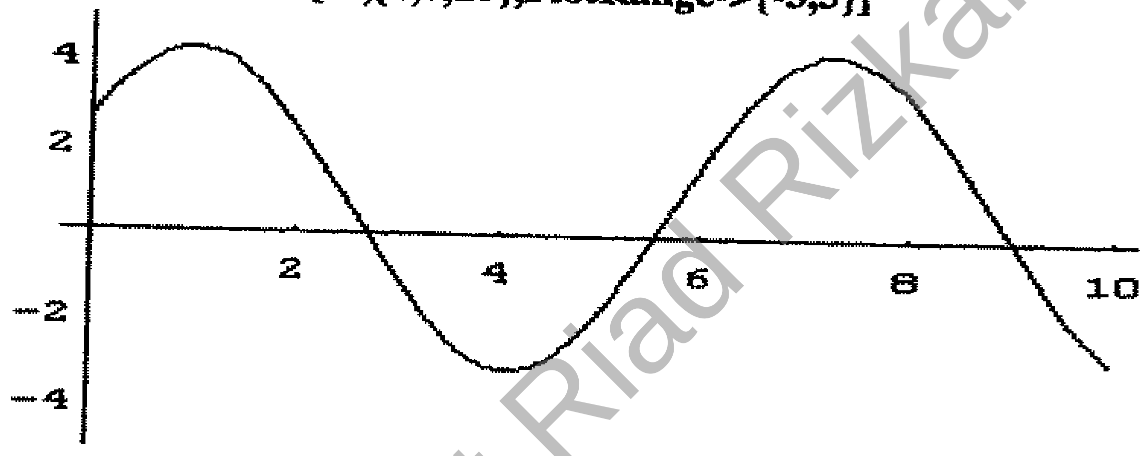


إيجاد افضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال {1,Cos(x),Sin(x)} بحيث تلائم قائمــــة البيانات data3 ثم رســـم المعادلة f5 الناتجـــة من الدالة Fit

In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]
Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]

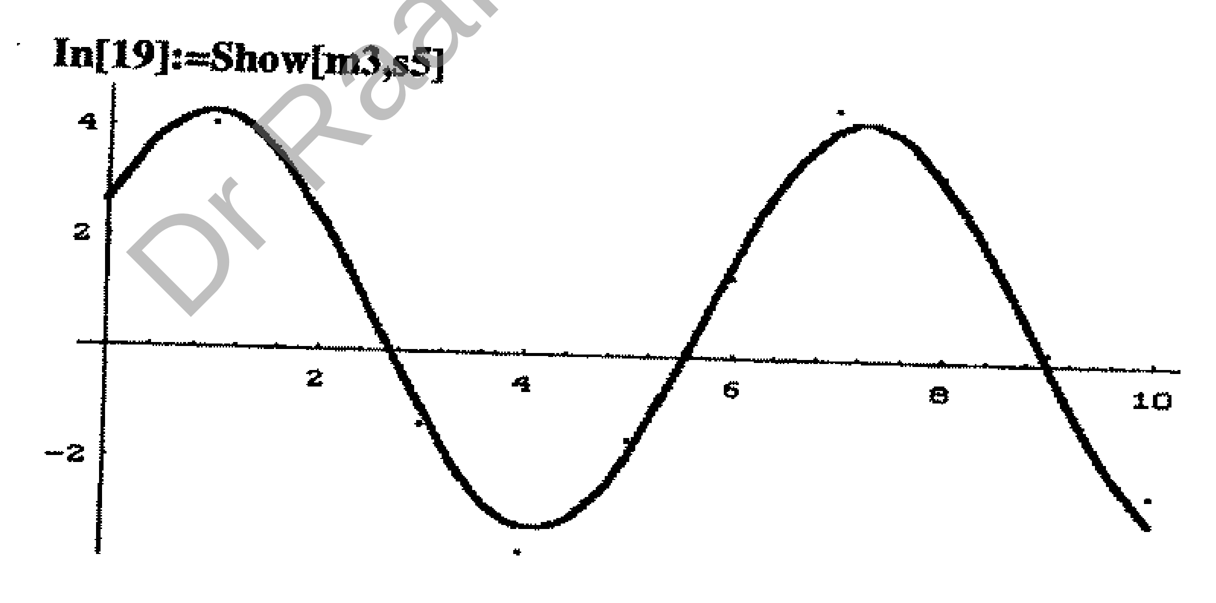


In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]



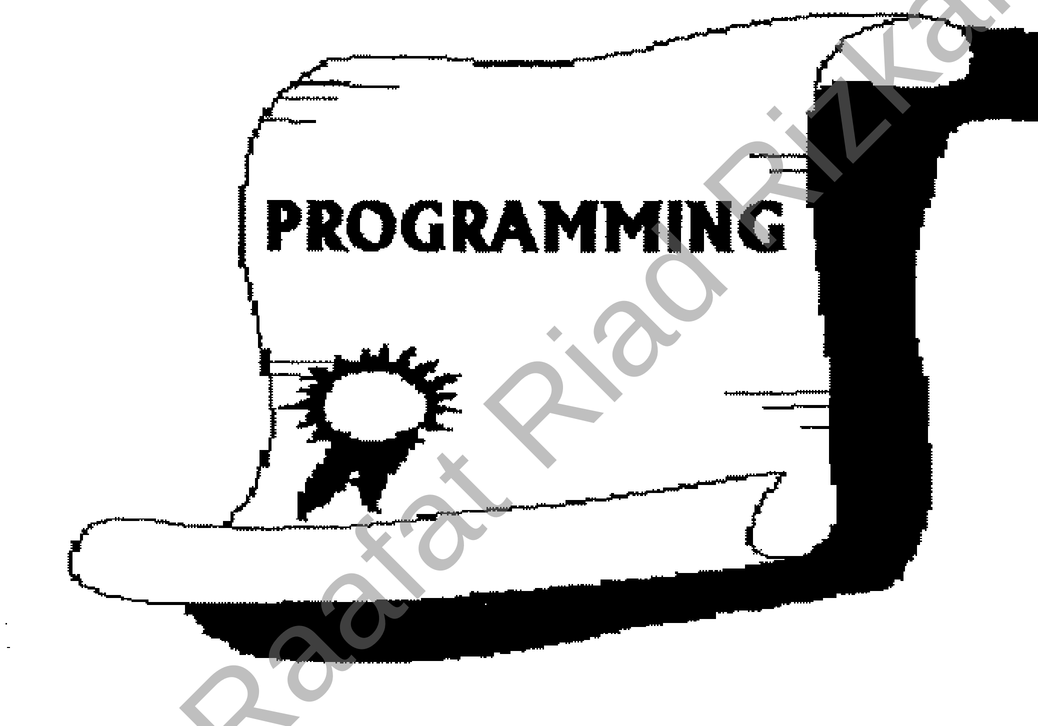
إظهار رسم المعادلة s5 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data3

In[19]:=Show[m3,s5]



الباب السابع

البرمجة فى ماثيماتيكا

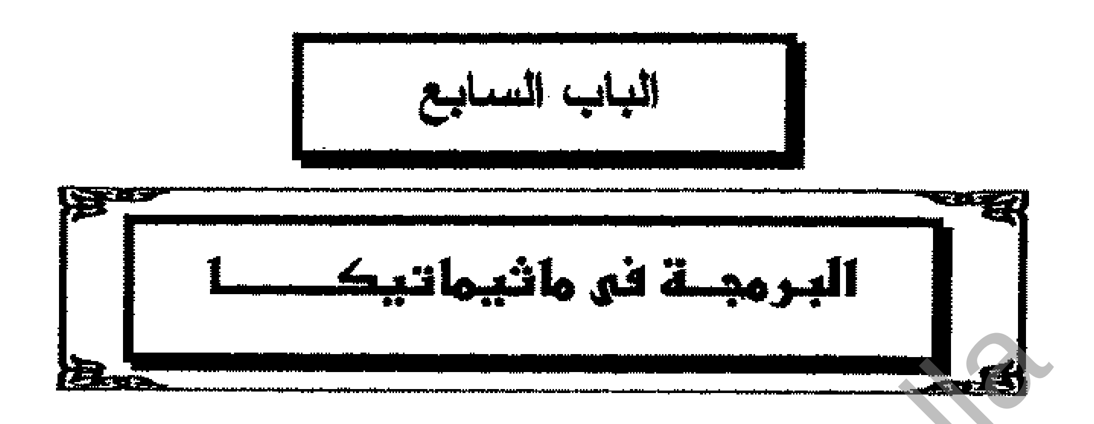


فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. منظومة الإجراءات Procedure

٢. الحلقات التكرارية Loops

٣. أوامر الانتقال المشروط Conditionals



عند بناء الحسابات فى ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج أن نربط مجموعة الأوامر معا ويمكن أن يتم ذلك باستخدام منظومة إجراءات Procedure .

١ . منظومة الإجراءات Procedure

منظومة الإجراءات هى عبارة عن متتابعة من أوامر أو تعبيرات ماثيماتيكا بحيث يفصل بين كلا منها علامة الفصلة المنقوطة ; وقيمة التعبير الأخير فى المنظومة يمثل الناتج النهائى .

تعريف منظومة تتكون من مجموعة من الأوامر

Command1;Command2;...

```
In[1]:=r=(1+x)^2;r=Expand[r];r-1
```

Out[1]= $2x + x^2$

فى هذا المثـــال نلاحظ أن منظومة الإجراءات عبارة عن ثلاثة تعبيرات حســـابية يفصل كل منها عن الآخر بفصلة منقوطة كما نلاحظ أن الناتج النهائى هـــو قيمة التعبير الأخير (r - 1) فى منظومة الإجراءات .

ويمكن تعريف الدالة كمنظومة إجراءات حيث نستخدم الأقواس ( ) لتوضيح أن كل الإجراءات معا تمثل الدالة f

```
In[2]:= f[x_]:=(t=(1+x)^2;t=Expand[t])
```

لحساب قيمة الدالة f عند x=a

```
In[3]:= f[a]
```

Out[3]= $1+2a+a^2$

عند الاستعلام عن قيمة t نجد أن المتغير t اصبح يمثل القيمة $1+2a+a^2$ ويحتفظ بها حتى بعد الخروج من المنظومة .

```
In[4]:= t
```

Out[4]= $1 + 2 a + a^2$

وفى كثير من الأحيان نحتاج الى أن نجعل المتغيرات المستخدمة داخل أى منظومة إجراءات كمتغيرات موضعية (Local) بمعنى أن هذه المتغيرات تحتفظ بالقيم داخل منظومة الإجراءات فقط ولكن تفقد هذه القيم بعد إنهاء الحسابات فى المنظومة والخروج منها ويتم عمل ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام الأمر **Block** أو الأمر **Module** كالآتى :

للإعلان عن أن المتغيرات ...x,y, تمثل متغيرات موضعية داخل منظومة الإجراءات **procedure**
Block[{x, y, ...}, procedure]
Or
Module[{x, y, ...}, procedure]
تحديد القيم الابتدائية ... ,x = xo , y = yo للمتغيرات الموضعية داخل منظومة الإجراءات **procedure**
Block[{x=xo, y=yo, ...}, procedure]
Or
Module[{x = x0, y=yo, ...}, procedure]

وبذلك فإنه بواسطة الأمر Block أو الأمر Module يمكن تعريف أى متغيرات داخل منظومة الإجراءات الواحدة دون التأثير على القيم بخارج المنظومة وبالتالى يمكن تعريف نفس المتغير الموضعى داخل اكثر من منظومة إجراءات .

In[5]:=
g[x_]:=Block[{u},u=(1+x)^2;u=Expand[u]]

عند استخدام الأمر Block في تعريف الدالة g فان u يعامل كمتغير موضعى

In[6]:= g[a]
Out[6]= $1 + 2a + a^2$

لحساب قيمة الدالة g عند $x = a$

In[7]:=u
Out[7]=u

عند الاستعلام عن قيمة u نلاحظ عدم وجود قيمة لأن u متغير موضعى

In[8]:=x=5;
Module[{x},x=Random[];Print[x];]
Out[8]=0.863718

تعريف x=5 خارج المنظومة ثم استخدام الأمر Module واعتبار ان x متغير موضعى وطباعة قيمة عشوائية للمتغير x

In[9]:=?x
Out[9]=Global`x
x = 5

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن $x = 5$ وهى القيمة الموجودة خارج الأمر Module

٢ . الحلقات التكرارية Loops

منظومة الإجراءات تسمح بتنفيذ مجموعة من تعبيرات ماثيماتيكا وفقا لترتيب هذه التعبيرات داخل منظومة الإجراءات وفي كثير من الأحيان نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات بصورة متكررة ويتم ذلك داخل ماثيماتيكا باستخدام أوامر خاصة بالحلقات المتكررة Loops حيث تعمل الحلقات المتكررة على تكرار مجموعة متتالية من الأوامر بصورة متكررة لعدد محدود من المرات مع إمكانية التغيير الأوتوماتيكى لقيم المتغيرات داخل الحلقات التكرارية ، ومن أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحلقات التكرارية هو الأمر Do والذى يستخدم بصورة مشابهة كما في لغات البرمجة مثل فورتران FORTRAN والأمر Do له استخدامات متعددة وصيغته العامة موضحه بالجدول الآتى :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب قيمة expr عدد n من المرات	Do[expr,{n}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=1 الى i=imax بخطوة تساوى 1	Do[expr,{i,imax}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى 1	Do[expr,{i,imin,imax}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى istep	Do[expr,{i,imin,imax,istep}]
حساب قيمة expr لقيم i , j المعطاة	Do[expr,{i,imin,imax},{j,jmin, jmax}]

في هذه الحلقة يتم حســـــاب التعبير $t=2(1+t)$ ثلاث مرات حيث $t=x$

```
In[1]:=t=x;Do[t=2(1+t),{3}];t
Out[1]=2 (1 + 2 (1 + 2 (1 + x)))
```

في هذه الحلقة يتم طباعة m^2 لقيم m من 1 الى 3

```
In[2]:=Do[Print[m^2],{m,3}]
Out[2]= 1
        4
        9
```

في هذه الحلقة يتم حســـــاب التعبير $a = i^2 + 3j$ ثم طباعته لقيم i,j المعطاة

```
In[3]:=Do[a=I^2+3j;Print[a],{I,2},{j,I}]
Out[3]= 4
        7
        10
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن تكرار تطبيق نفس الدالة عدد محدود من المرات على تعبـــير معـــين باستخدام الأمر **Nest** كالآتي :

Nest[f,expr,n]	تطبيق الدالة **f** على التعبير **expr** لعدد **n** من المرات

حساب f (f (f (x)))

```
In[4]:=Nest[f,x,3]
Out[4]= f[f[f[x]]]
```

تعريف الدالة $f(x) = (x+1)^2$ ثم حساب f (f (x))

```
In[5]:=f[x_]=(x+1)^2;Nest[f,x,2]
Out[5]=(1 + (1 + x)^2 )^2
```

حساب f (f (1))

```
In[6]:= Nest[f,1,2]
Out[6]= 25
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن بناء الحلقات بحيث يتم إيقاف تنفيذ التكرار إذا لم يتحقق شرط معين وذلك باستخدام الأوامر **For , While** كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التى يقوم بها الأمر
For[start,test,step,body]	حساب قيمة **start** والتحقق من الشرط **test** لتنفيذ **body** مع تكرار إضافة **step**
While[test,body]	يتم تكرار تنفيذ **body** إذا كان الشرط **test** متحقق

حلقة باستخدام **For** حيث يتم البدء بقيمة **i=0** والتحقق من الشرط **i<3** لتنفيذ طباعة **i** مع إضافة **1** الى **i**

```
In[7]:=For[i=0,i<3,i=i+1,Print[i]]
Out[7]=
        0
        1
        2
```

تنفيذ الحلقة السابقة باستخدام **While**

```
In[8]:=i=0;While[i<3,Print[i];i=i+1]
Out[8]=
        0
        1
        2
```

وعند استخدام أوامر الحلقات في ماثيماتيكا خاصة مع الأوامر While , For غالبا ما نحتاج الى تكرار تعديل قيم فى بعض المتغيرات المستخدمة داخل الحلقة ، وتوجد بعض الطرق المختصرة لأجراء مثل هذه التعديلات فى قيم المتغيرات والجدول الآتى يوضح ذلك .

معنى العملية المختصرة	العملية المختصرة
زيادة قيمة i بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل i++	i++
نقصان قيمة i بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل i--	i--
زيادة قيمة i بمقدار 1 وجعل i هى القيمة الجديدة آي أن ++i تمثل i+1	++i
نقصان قيمة i بمقدار 1 وجعل i هى القيمة الجديدة آي أن --i تمثل i-1	--i
زيادة قيمة i بمقدار d آي أن i=i+d	i+ = d
نقصان قيمة i بمقدار d آي أن i=i-d	i- = d
ضرب x فى العدد c آي أن x = x * c	x*=c
قسمة x على العدد c آي أن x = x / c	x/=c
استبدال قيم x , y آي تغيير قيمة x لتصبح y وتغيير قيمة y لتصبح x	{x,y}={y,x}

في هذا المثال يتم طباعة قيمة ++i وقيمة i
ونلاحظ أن قيمة ++i هي قيمة i قبل الزيادة

```
In[9]:=i=5;Print[i++];Print[i]
Out[9]=
        5
        6
```

في هذا المثال يتم طباعة قيمة i++ وقيمة i
ونلاحظ أن قيمة i++ هي قيمة i بعد الزيادة

```
In[10]:=i=5;Print[++i];Print[i]
Out[10]=
        6
        6
```

في هذه المنظومة تم وضع r=x ثم زيادة قيمة r
بمقدار 3y فتصبح قيمة r الجديدة x+3y

```
In[11]:=r=x;r+=3y;r
Out[11]=x + 3 y
```

استبدال قيم a , b

```
In[12]:=a=3;b=7;Print[{a,b}];
        {a,b}={b,a};Print[{a,b}]
Out[12]=
        {3, 7}
        {7, 3}
```

استبدال قيم x , y , z

```
In[13]:=x=1;y=2;z=3;Print[{x,y,z}];
        {x,y,z}={z,x,y};Print[{x,y,z}]
Out[13]=
        {1, 2, 3}
        {3, 1, 2}
```

```
In[14]:=For[i=1;t=x,i^2<10,i++,t=t^2+i;Print[t]]

Out[14]=
```

$1+x^2$

$2+\left(1+x^2\right)^2$

$3+\left(2+\left(1+x^2\right)^2\right)^2$

هذه الحلقة على الصورة **For[start,test,step,body]** حيث

start	i=1 ; t=x
test	i^2<10
step	i++
body	t=t^2+i ; Print[t]

٣ . أوامر الانتقال المشـروط Conditionals

عند بناء منظومة الإجراءات Procedure في ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات إذا تحقق شروط معينة ويتم ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام أوامـــر الانتقـــال المشـــروط الآتية :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
يتم تنفيذ then إذا كـــان test تحقــق وخلاف ذلك يتم تنفيذ else	If[test,then,else]
إذا كان test تحقق يتم تنفيذ then وإذا كان test غير متحقـــق يتـــم تنفيـــذ else وخلاف ذلك يتم تنفيذ unknown	If[test,then,else,unknown]
يتم تنفيذ value المناظرة الى أول اختبـــار testi يتحقق	1,value1,test2,value 2, ...]

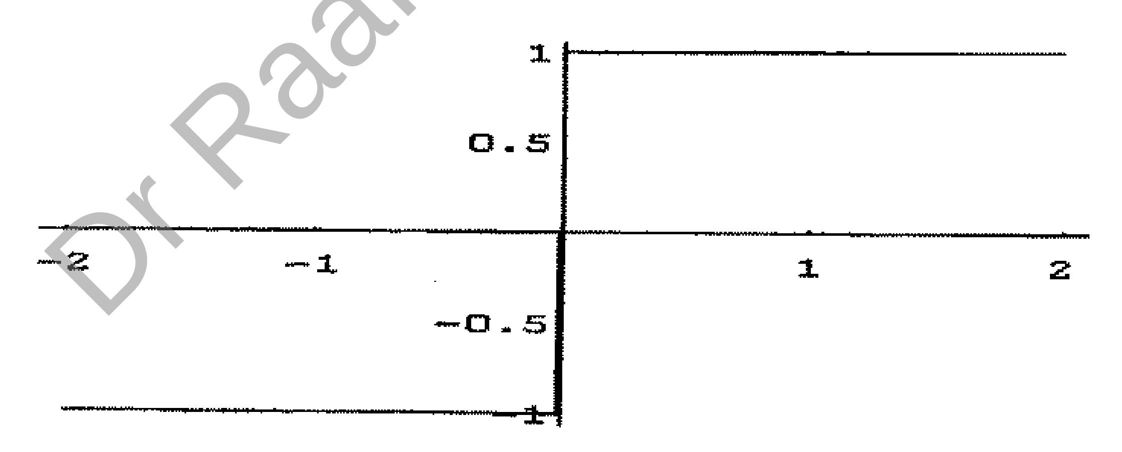
```
In[1]:= x=3;y=5;
        If[ x > y , Print[x] , Print[y] ]
Out[1]=
        5
```

إدخال قيم x , y ثم طباعة العدد الأكبر وقد تم استخدام أمر الانتقال المشروط If على الصورة If[test,then,else] حيث

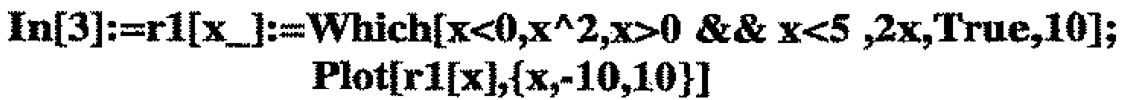
test	x > y
then	Print[x]
else	Print[y]



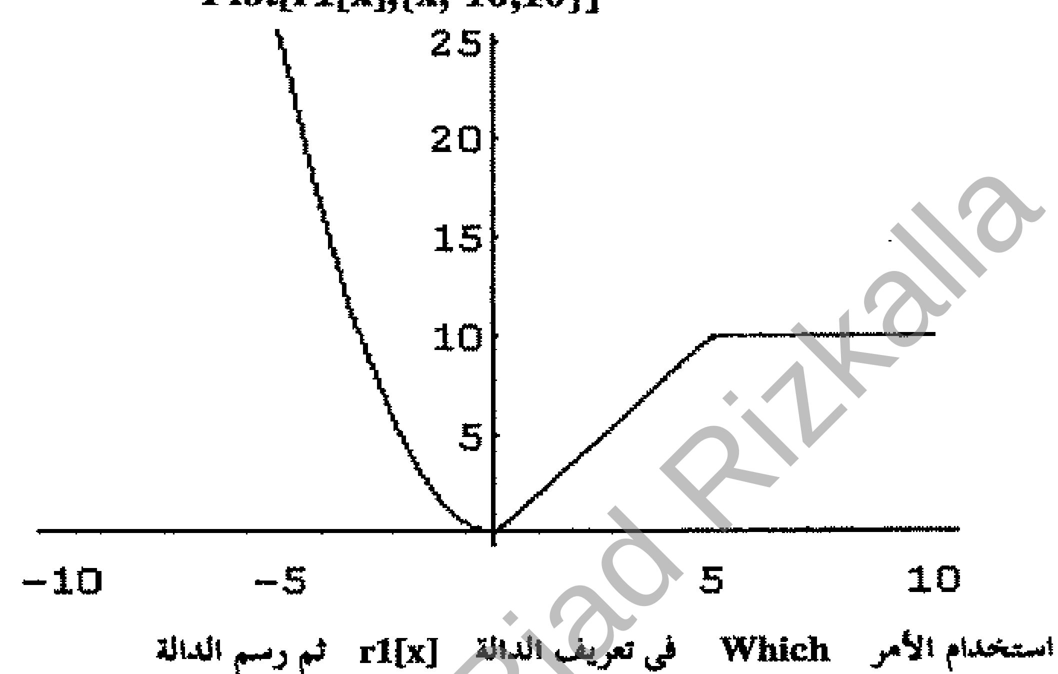
```
In[2]:=f[x_]:=If[x>0,1,-1];
            Plot[f[x],{x,-2,2}]
```



استخدام الأمر If فى تعريف الدالة f[x] ثم رسم الدالة

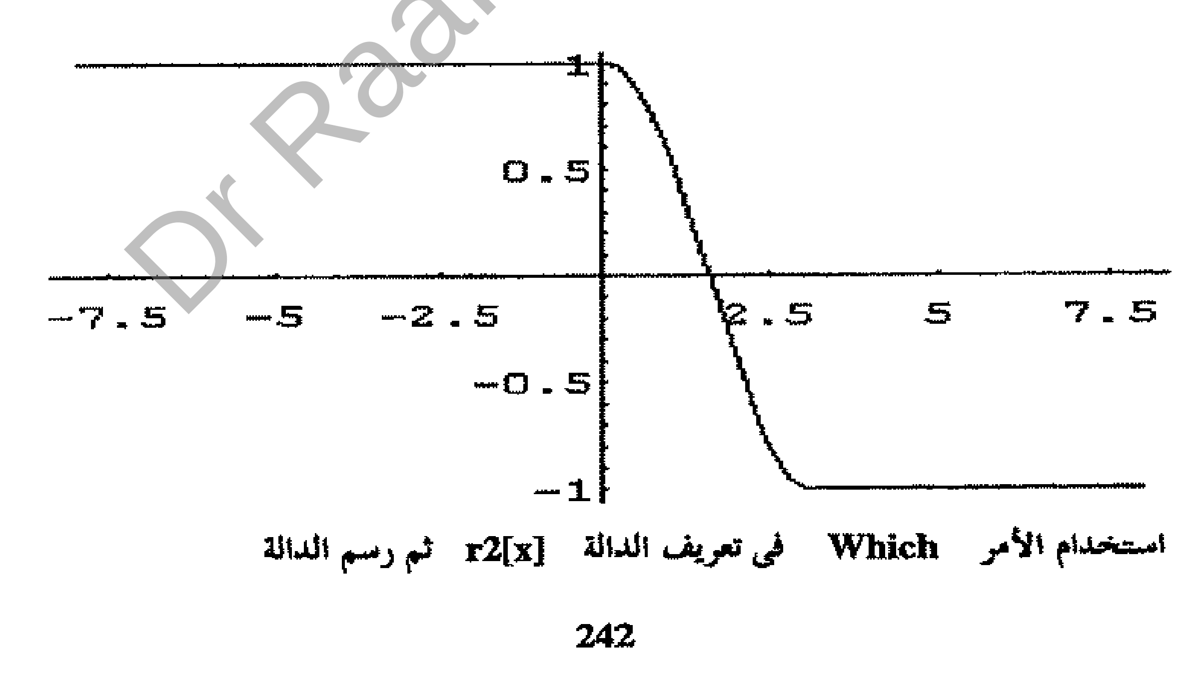


```
In[3]:=r1[x_]:=Which[x<0,x^2,x>0 && x<5 ,2x,True,10];
        Plot[r1[x],{x,-10,10}]
```



استخدام الأمر Which في تعريف الدالة r1[x] ثم رسم الدالة


```
In[4]:=r2[x_]:=Which[x<0,1,x<N[Pi],Cos[x],True ,-1];
        Plot[r2[x],{x,-8,8}]
```



استخدام الأمر Which في تعريف الدالة r2[x] ثم رسم الدالة

منظومة تم فيها تعريف قائمة a من الأعداد الحقيقية ثم حساب وطباعة العدد الأصغر من القائمة

```
In[5]:=a={5,2,7,55,-4,9,3,10,-24,44,65,-21};mi=a[[1]];
       Do[If[mi>a[[i]],mi=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
       Print["Minimum of the list   a = ",mi]

Out[5]= Minimum of the list   a =  -24
```

منظومة تم فيها حساب وطباعة العدد الأكبر من القائمة a

```
In[6]:= ma=a[[1]];
       Do[If[ma<a[[i]],ma=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
       Print["Maximum of the list   a = ",ma]

Out[6]= Maximum of the list   a = 65
```

منظومة تم فيها حساب وطباعة العدد الأصغر والعدد الأكبر من القائمة a

```
In[7]:= mi=a[[1]];ma=a[[1]];
       Do[Which[mi>a[[i]],mi=a[[i]],ma<a[[i]],ma=a[[i]]];++i,
          {i,2,Length[a]-1}];
        Print["Minimum of the list a = ",mi];
        Print["Maximum of the list a = ",ma]

Out[7]= Minimum of the list a = -24
          Maximum of the list a = 65
```

وباستخدام الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا يمكن حساب

العدد الأصغر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة Min

والعدد الأكبر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة Max

```
In[8]:=Min[a]
Out[8]=-24

In[9]:=Max[a]
Out[9]=65
```

المراجــع

[1] - Wolfram , Stephen
Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer ,
Second Edition , Addison Wesley , 1991 .

[2] - Wolfram , Stephen
Mathematica : The Student Book ,
Addison Wesley , 1994 .

[3] - Abell , Martha L . and Braselton, Tames P . ,
The Mathematica Handbook
Academic Press , 1992 .

[4] - Maeder , Roman ,
Programming in Mathematica ,
Addison Wesley , 1992 .

رقم الإيداع : ٢٠٠٠/٥٦١٦

مطابع الدار الهندسية ت : ٥٤٠٢٥٩٨

هذا الكتاب

برنامج ماثيماتيكا هو أحد برامج الكمبيوتر الهامة التى ظهرت حديثاً ، ويحتوى على العديد من الأوامر والدوال التى تغطى معظم الفروع الدقيقة فى الرياضيات .

ويقدم هذا الكتاب شرح تفصيلى لبرنامج ماثيماتيكا وكيفية التعامل مع الأوامر والدوال الخاصة به على الكمبيوتر والأستفادة المثلى منه فى حل المشاكل الرياضية المختلفة .

ويقدم الكتاب فى اسلوب مبسط بعيداً عن التعقيد كما يتضمن الجزء العملى الخاص بالتعرف على أوامر برامج ماثيماتيكا وتنفيذها على الكمبيوتر ، حيث يعرض العديد من الأمثلة التى تم تنفيذها على الكمبيوتر والتى تخدم مشاكل متعددة فى فروع الرياضيات المختلفة مثل التفاضل والتكامل ، والجبر ، والمعادلات التفاضلية والتحليل العددى ، كما يتضمن الكتاب العديد من التطبيقات للأوامر الخاصة برسم المنحنيات سواء فى المستوى أو الفراغ بالصورة الكرتيزية أو البرمترية ، كذلك حل أنظمة من المعادلات .

وهذا الكتاب موجه لدراسى الرياضيات والمهتمين بالكمبيوتر وتطبيقه فى مجال الرياضيات ، حيث يخدم الدارسين سواء فى المرحلة الثانوية أو الجامعية لطلاب قسم الرياضيات بكلية التربية أو العلوم أو كلية الهندسة .

والله ولى التوفيق ...

الناشر

ISBN : 977-281-137-5

ACADEMIC BOOKSHOP

